TRƯỜNG ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN
KHOA TOÁN KINH TẾ

TS. TRẦN TRỌNG NGUYÊN

CƠ SỞ toán tài chính



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN
KHOA TOÁN KINH TẾ

TS. TRẦN TRỌNG NGUYÊN

CƠ SỞ
TOÁN TÀI CHÍNH



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI - 2011

MỤC LỤC

Lời giới thiệu

Tài chính toán (Mathematical Finance) hay thường được gọi là Toán tài chính là một ngành khoa học mới xuất hiện và phát triển trong khoảng 4 thập kỷ trở lại đây. Cùng với sự phát triển của các công cụ tính toán ngẫu nhiên. Toán tài chính đã và đang phát triển mạnh mẽ và thu được những thành tựu rực rỡ. Nhiều giải thưởng Nobel Kinh tế đã đạt được trên lĩnh vực này. Ngày nay bộ môn khoa học này được phát triển mạnh ở hầu khắp các nước phát triển trên thế giới. Ở nước ta, trong khoảng 10 năm trở lại đây, ngành khoa học này được nhiều nhà nghiên cứu quan tâm tuy nhiên các kết quả áp dụng còn khiêm tốn. Năm 2000 đánh dấu một bước ngoặt lớn trong nền kinh tế nước ta với sự ra đời của Thị trường chứng khoán. Là một thị trường non trẻ, thị trường chứng khoán Việt Nam thu hút được sự quan tâm của khá nhiều nhà đầu tư và cả những nhà nghiên cứu trong và ngoài nước. Thị trường chứng khoán đã trở thành một kênh huy động vốn rất hiệu quả cho nền kinh tế đất nước, một sân chơi hấp dẫn nhưng cũng tiềm ẩn không ít biến động rủi ro.

Toán tài chính nghiên cứu hoạt động của thị trường tài chính trên cơ sở Giải tích ngẫu nhiên với giả định rằng các quá trình giá cả (của các hợp đồng, tài sản, ...) trong thị trường là các quá trình ngẫu nhiên dưới hai dạng cơ bản: thời gian rời rạc và thời gian liên tục. Sự biến động của thị trường thể hiện qua sự biến đổi giá trị các hợp đồng tài chính trong thị trường đó. Vấn đề đặt ra là làm thế nào để nắm bắt và dự báo được sự biến động này để lựa chọn phương án đầu tư hợp lý nhằm thu lợi nhuận cao và tránh rủi ro? Toán tài chính sẽ giúp chúng ta trả lời câu hỏi đó. Trong phạm vi giáo trình này, chúng tôi giới thiệu những cơ sở tính toán tất định và ngẫu nhiên trong tài chính nhằm giúp người đọc có những hiểu biết cơ sở ban đầu về Toán tài chính, từ đó có thể tiếp cận được các lý thuyết cao hơn.

Nội dung giáo trình gồm:

Chương 1. Các tính toán tài chính cơ bản.

Chương này trình bày một số khái niệm cơ bản trong tài chính mà đặc biệt

là thị trường chứng khoán nhằm giúp người đọc có được hình dung ban đầu về thị trường tài chính. Chúng tôi cũng giới thiệu một số tính toán tài chính cơ bản và một số nghiệp vụ thường gặp trong những giao dịch tài chính.

Chương 2. Mô hình ngẫu nhiên trong tài chính với thời gian rời rạc.

Trong chương này chúng tôi giới thiệu một số khái niệm về quá trình ngẫu nhiên với thời gian rời rạc với minh họa là các quá trình trong tài chính. Chương này cũng giới thiệu một số phái sinh tài chính như: quyền lựa chọn kiểu Âu, kiểu Mỹ, ... và một số phương pháp định giá trong mô hình thị trường với thời gian rời rạc.

Chương 3. Mô hình nửa liên tục và chuyển động Brown.

Chương này giới thiệu các mô hình nửa liên tục, một số khái niệm về quá trình ngẫu nhiên với thời gian liên tục và đặc biệt là chuyển động Brown - một quá trình thường được sử dụng để mô tả những biến động ngẫu nhiên trong rất nhiều lĩnh vực mà đặc biệt là trong mô hình tài chính với thời gian liên tục.

Chương 4. Tính toán ngẫu nhiên và ứng dụng.

Chương này nghiên cứu cơ sở tính toán ngẫu nhiên: Tích phân Itô, công thức Itô, tích phân ngẫu nhiên Stratonovich, ... thường được sử dụng trong tài chính.

Chương 5. Phương trình vi phân ngẫu nhiên và ứng dụng.

Chương này giới thiệu về phương trình vi phân ngẫu nhiên, một công cụ thường gặp để xây dựng các mô hình tài chính với thời gian liên tục. Trên cơ sở tính toán ngẫu nhiên ở chương trước, chúng tôi giới thiệu phương pháp giải một số lớp phương trình vi phân ngẫu nhiên thường gặp. Để giải quyết các bài toán thực tế, đặc biệt là các bài toán trong tài chính, chúng tôi cũng giới thiệu ở đây một số phương pháp giải số các phương trình vi phân ngẫu nhiên và mô phỏng lời giải các mô hình tài chính thường gặp.

Để xây dựng một giáo trình cơ sở ban đầu về Toán tài chính với khối lượng kiến thức toán học không nặng lắm nhưng đủ để có thể nghiên cứu các chuyên môn sâu hơn, phù hợp với đối tượng là sinh viên các trường kinh tế và một số trường không chuyên về kinh tế là điều không dễ dàng. Qua nhiều buổi Seminar, thảo luận tại Khoa Toán kinh tế - trường Đại học Kinh tế Quốc dân, chúng tôi quyết định chọn cách tiếp cận của Steven Shreve: Mô hình rời rạc → Mô hình nửa liên tục → Mô hình liên tục. Do lần đầu được biên soạn nên giáo trình này không tránh khỏi những thiếu sót. Kính mong nhận được sự góp ý và chỉ bảo của quý vị độc giả.

Hà Nội, tháng 10 năm 2010

Chương 1

Các tính toán tài chính cơ bản

Chương này giới thiệu một số khái niệm mở đầu về cấu trúc thị trường tài chính và các tính toán cơ bản nhằm giúp người đọc có được hình dung ban đầu về những quy tắc tính toán thường gặp trong những giao dịch tài chính (xem các tài liệu [1], [7], [9]). Một số vấn đề tài chính công ty cũng được đề cập cùng với việc sử dụng bảng tính Excel. Đa số các công thức tính toán được xem xét ở đây đều tập trung vào sự thay đổi của phương pháp chiết khấu dòng tiền, chi phí vốn đầu tư và tỷ suất mà dòng tiền mặt của công ty được chiết khấu so với giá trị của công ty. Trọng tâm là các vấn đề về thuê/mua cơ bản, có sử dụng phương pháp cho vay tương đương. Phần cuối của chương này đề cập đến phân tích tài chính của các hợp đồng thuê tài chính có vay nợ; tỷ lệ hoàn vốn theo phương pháp nhiều giai đoạn với tỷ suất nội hoàn hỗn hợp (IRR), và việc sử dụng Excel để xác định tỷ lệ này. Nội dung cụ thể của chương gồm:

- Giới thiệu về thị trường tài chính.
- Một số tính toán tài chính cơ bản:
  - Lãi đơn, lãi gộp.
  - Giá trị hiện tại ròng (NPV).
  - Tỷ suất nội hoàn (IRR).
  - Giá trị tương lai.
  - Tiền lương và các vấn đề tích luỹ.
  - Lãi suất lũy tiến liên tục.
- Một số nghiệp vụ chứng khoán.

1.1 Giới thiệu về thị trường tài chính và một số khái niệm cơ bản

1.1.1 Giới thiệu về thị trường tài chính

Thị trường tài chính thường được cấu trúc như hình 1.1, trong đó các tổ chức và cá nhân tham gia thị trường có thể chia thành các nhóm sau:

Nhà đầu tư (Individuals): Là những người thực sự mua và bán chứng khoán trên thị trường chứng khoán. Nhà đầu tư có thể được chia thành 2 loại: nhà đầu tư cá nhân và nhà đầu tư có tổ chức.

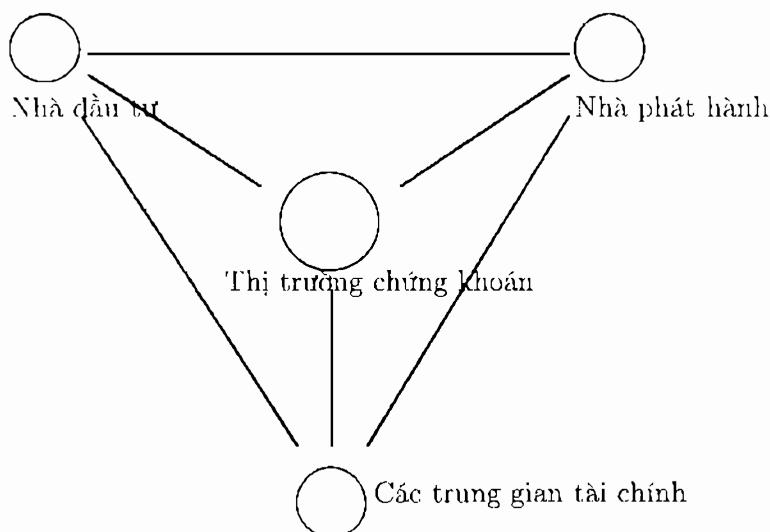
Nhà phát hành (Corporations): Là các tổ chức, công ty cổ phần thực hiện huy động vốn thông qua thị trường chứng khoán. Nhà phát hành là người cung cấp các chứng khoán - nguồn hàng hoá của thị trường chứng khoán. Có một số loại nhà phát hành sau:

- Chính phủ và chính quyền địa phương phát hành các trái phiếu Chính phủ và trái phiếu địa phương.
- Công ty phát hành các cổ phiếu và trái phiếu công ty.
- Các tổ chức tài chính phát hành các công cụ tài chính như các trái phiếu, chứng chỉ quỹ, ... phục vụ cho hoạt động của họ.

Các trung gian tài chính (Financial Intermediates): Bao gồm:

- Các tổ chức kinh doanh trên thị trường chứng khoán: Công ty chứng khoán, Quỹ đầu tư chứng khoán, Các trung gian tài chính: Ngân hàng đầu tư, công ty bảo hiểm, ...
- Các tổ chức có liên quan đến thị trường chứng khoán: Cơ quan quản lý Nhà nước, Sở giao dịch chứng khoán, Hiệp hội các nhà kinh doanh chứng khoán, Tổ chức lưu ký và thanh toán bù trừ chứng khoán, Công ty dịch vụ máy tính chứng khoán, Các tổ chức tài trợ chứng khoán, Công ty đánh giá hệ số tín nhiệm, ...

Thị trường chứng khoán (Security Markets): Thị trường chứng khoán được quan niệm là nơi diễn ra các hoạt động giao dịch mua bán chứng khoán trung và dài hạn. Việc mua bán này được tiến hành ở thị trường sơ cấp khi người mua mua được chứng khoán lần đầu từ những người phát hành, và ở những thị trường thứ cấp khi có sự mua đi bán lại các chứng khoán đã được phát hành ở thị trường sơ cấp.



Hình 1.1: Cấu trúc thị trường tài chính

Như vậy, xét về mặt hình thức, thị trường chứng khoán là nơi diễn ra các hoạt động trao đổi, mua bán, chuyển nhượng các giấy tờ có giá trị thường gọi là chứng khoán như: trái phiếu, cổ phiếu, quyền lựa chọn, hợp đồng tương lai. ... qua đó thay đổi chủ thể nắm giữ chứng khoán.

Thị trường chứng khoán có những chức năng cơ bản sau:
- Huy động vốn đầu tư cho nền kinh tế.
- Cung cấp môi trường đầu tư cho công chúng.
- Tạo tính thanh khoản cho các chứng khoán.
- Đánh giá hoạt động của doanh nghiệp.
- Tạo môi trường giúp Chính phủ thực hiện các chính sách vĩ mô.

Thị trường chứng khoán hoạt động theo các nguyên tắc cơ bản sau:
- Nguyên tắc công khai.
- Nguyên tắc trung gian.
- Nguyên tắc đấu giá.

Người ta thường phân loại thị trường chứng khoán theo một số cách sau:

- Căn cứ vào sự luân chuyển các nguồn vốn, thị trường chứng khoán được chia thành thị trường sơ cấp và thị trường thứ cấp.

- Thị trường sơ cấp là thị trường mua bán các chứng khoán mới phát hành. Trên thị trường này, vốn từ nhà đầu tư sẽ được chuyển sang nhà phát hành thông qua việc nhà đầu tư mua các chứng khoán mới phát hành.

- Thị trường thứ cấp là nơi giao dịch các chứng khoán đã được phát hành trên thị trường sơ cấp, đảm bảo tính thanh khoản cho các chứng khoán đã phát hành.

- Căn cứ vào phương thức hoạt động của thị trường, thị trường chứng khoán được phân thành thị trường tập trung (Sở giao dịch chứng khoán) và phi tập trung (thị trường OTC).

- Căn cứ vào hàng hoá trên thị trường, thị trường chứng khoán cũng có thể được phân thành: thị trường cổ phiếu, thị trường trái phiếu, thị trường các công cụ chứng khoán phái sinh.

  - Thị trường cổ phiếu là thị trường giao dịch và mua bán các loại cổ phiếu, bao gồm cổ phiếu thường, cổ phiếu ưu đãi.

  - Thị trường trái phiếu là thị trường giao dịch và mua bán các trái phiếu đã được phát hành, các trái phiếu này bao gồm các trái phiếu công ty, trái phiếu đô thị và trái phiếu Chính phủ.

  - Thị trường các công cụ chứng khoán phái sinh là thị trường phát hành và mua đi bán lại các chứng từ tài chính khác như: quyền mua cổ phiếu, chứng quyền, hợp đồng quyền chọn...

1.1.2 Một số khái niệm trong thị trường chứng khoán

Trong thị trường chứng khoán, hai loại tài sản nguyên thuỷ thường được đem ra mua bán là *cổ phiếu* và *trái phiếu*.

Cổ phiếu (Stock, Share) là loại chứng khoán phát hành bởi công ty để tích huy động vốn cho hoạt động kinh doanh của họ. Giá cổ phiếu biến động phụ thuộc vào tình trạng xã hội và hoạt động kinh doanh của công ty. Người giữ cổ phiếu có quyền tham gia hoạt động kinh doanh của công ty (thường theo nguyên lý "một cổ phiếu - một lá phiếu") và nhận cổ tức.

Trái phiếu (Bond) là giấy ghi nợ phát hành bởi nhà nước, ngân hàng, công ty cổ phần, và các tổ chức tài chính khác. Trái phiếu gắn liền với các chứng khoán vị thế dài hạn, giá trị của trái phiếu tăng lên theo thời hạn với một lãi

suất cố định hoặc thay đổi. Có nhiều loại trái phiếu như: tài khoản ngân hàng (bank account), trái phiếu Chính phủ (treasury bond), trái phiếu của các công ty (corporate bond), ...

Theo tập quán, người ta thường gọi trái phiếu và cổ phiếu là các *chứng khoán cơ sở* (Underlying securities) hoặc *tài sản cơ sở* (Underlying asset). Trên thị trường chứng khoán, ngoài các tài sản cơ sở, người ta thường giao dịch nhiều loại tài sản khác gọi là các *chứng khoán phái sinh.*

Chứng khoán phái sinh (Derivative securities) là một chứng khoán mà giá trị của nó phụ thuộc vào các tài sản cơ sở: cổ phiếu, trái phiếu...

Không giống như các chứng khoán cơ sở, các chứng khoán phái sinh liên tục sinh sôi số lượng, các phái sinh mới được kiến tạo liên tục. Do vậy, việc xây dựng lý thuyết định giá các chứng khoán phái sinh và quản lý rủi ro của chúng mới là mục đích chính của lĩnh vực Toán tài chính.

Hai loại chứng khoán phái sinh thường gặp là *quyền chọn* và *hợp đồng tương lai.*

Quyền chọn (Option) là một hợp đồng tài chính cho phép người giữ nó được quyền mua hoặc bán (nhưng không bắt buộc) một tài sản cơ sở (chẳng hạn: cổ phiếu, tiền tệ, ...) tại một thời điểm nhất định với giá đã xác định.

Quyền chọn tài chính bao gồm quyền chọn mua và quyền chọn bán. Một quyền chọn mua (call option) hoặc bán (put option) là hợp đồng mà cho phép người giữ nó quyền mua (hoặc bán) một tài sản đã quy định, được biết như một tài sản cơ bản, tại một ngày xác định (ngày đáo hạn) với một giá xác định (gọi chung là giá thực hiện hay giá thực thi (exercise price, strike price). Vì người giữ quyền chọn có quyền nhưng không có nghĩa vụ mua hoặc bán một tài sản, anh ta sẽ đưa ra quyết định phụ thuộc vào sự thoả thuận có lợi cho anh ta hay không. Quyền chọn gọi là được thực hiện khi người giữ nó chọn mua (hoặc bán) tài sản. Nếu quyền chọn chỉ có thể thực hiện vào ngày đáo hạn thì quyền chọn đó được gọi là quyền chọn kiểu Âu (European option), nếu quyền chọn được phép thực hiện tại bất kỳ thời điểm nào từ ngày ký hợp đồng cho đến ngày đáo hạn, thì nó được gọi là một quyền chọn kiểu Mỹ (American option). Quyền chọn mua và bán đơn giản mà không có đặc trưng nào đặc biệt gọi chung là *quyền chọn vanilla* (plain vanilla options). Ta cũng thường gặp một số dạng quyền chọn khác như: quyền chọn kiểu Á (Asian option), *quyền chọn ngược* (lookback option), *quyền chọn rào cản* (barrier option), v.v...

Giá quyền chọn phụ thuộc giá của tài sản cơ bản. Để minh hoạ, ta xét một quyền chọn mua mà gần thời điểm đáo hạn và giá hợp đồng là 100 USD. Giả sử giá hiện tại của tài sản là 98 USD, khi đó giá quyền chọn mua gần với 0 vì

giá tài sản không tăng vượt quá 100 USD trong một thời gian khá ngắn. Tuy nhiên khi giá tài sản là 102 USD thì giá quyền chọn mua gần kết thúc khoảng 2 USD. Do đó, giá quyền chọn mua biến động theo giá tài sản. Nói cách khác, khi người đầu tư buôn bán các tài sản cơ bản dẫn đến tác động tới giá cả của quyền chọn.

Khi thương thảo hợp đồng, người tham dự ký hợp đồng với người giữ quyền chọn gọi là người phát hành hay người bán (writer) quyền chọn. Người giữ và người phát hành quyền chọn tương ứng gọi là vị thế dài hạn (trường vị) và vị thế ngắn hạn (đoản vị) của hợp đồng quyền chọn. Không giống như người giữ quyền chọn, người phát hành có bổn phận quan tâm tới hợp đồng quyền chọn, người phát hành cần phải bán tài sản nếu người mua chọn mua tài sản. Đây là một trò chơi có tổng bằng không (zero-sum). Người giữ quyền chọn kiếm được từ sự thua lỗ của người phát hành hoặc ngược lại. Dễ dàng nhận thấy giá quyền chọn còn phụ thuộc vào giá hợp đồng (thực hiện), thời gian tới thời điểm đáo hạn và giá hiện tại (giá thực tế) của tài sản.

Hợp đồng tương lai (Futures contract) là một hợp đồng giữa hai bên để mua hoặc bán một tài sản tại một thời điểm tất định trong tương lai với một giá đã xác định.

Thu hoạch (Terminal payoffs): Xét một quyền chọn mua kiểu Âu với giá thực hiện X và giả sử ký hiệu S_T là giá của tài sản cơ bản vào ngày đáo hạn T. Nếu $S_T > X$ thì người giữ quyền chọn mua sẽ chọn thực hiện hợp đồng vì anh ta có thể mua tài sản có giá trị S_T với giá X. Người giữ kiếm được từ quyền chọn mua này $S_T - X$ đơn vị tiền tệ. Tuy nhiên, nếu $S_T \leq X$, thì người giữ quyền chọn mua sẽ bị mất quyền thực hiện quyền chọn vì anh ta có thể mua tài sản này trên thị trường với giá nhỏ hơn hoặc bằng giá thực hiện X đã biết. Thu hoạch từ vị thế dài hạn (vị thế của người giữ) trong một quyền chọn mua kiểu Âu này là:

$$\max(S_T - X, 0).$$

Tương tự, thu hoạch từ vị thế dài hạn trong một quyền chọn bán kiểu Âu là:

$$\max(X - S_T, 0),$$

vì quyền chọn bán sẽ chỉ được thực hiện nếu $S_T < X$, khi mà, thay vì S_T, tài sản được bán với giá X cao hơn. Trong cả quyền chọn mua và quyền chọn bán, thu hoạch là không âm. Các tính chất này của quyền chọn rất tự nhiên bởi chúng chỉ được thực hiện nếu thu hoạch là dương.

Phí quyền chọn (Options primeum): Vì người phát hành quyền chọn có trách nhiệm trong tương lai, anh ta cần phải được nhận một khoản phí do người giữ quyền chọn trả trước khi cả hai ký vào hợp đồng quyền chọn. Một quan điểm lựa chọn là: người giữ quyền chọn được bảo đảm nhận một thu hoạch không âm, anh ta cần phải trả một khoản phí khi nhập vào trò chơi quyền chọn. Dễ dàng nhận thấy phí quyền chọn phụ thuộc vào giá hợp đồng (thực hiện), thời gian tới thời điểm đáo hạn, giá hiện tại (giá thực tế) của tài sản, *lãi suất* (interest rate) hiện hành và mức độ ngẫu nhiên - gọi chung là *độ biến động giá* (volatility) của giá tài sản. Một câu hỏi tự nhiên là: Phí quyền chọn (thường gọi là giá quyền chọn hay giá trị quyền chọn) là như thế nào cho đẹp để trò chơi là công bằng cho cả hai bên người phát hành và người giữ quyền chọn? Chúng ta sẽ trả lời câu hỏi này trong các phần sau.

Danh mục đầu tư (Portfolio) là việc kết hợp sở hữu từ hai trở lên các khoản đầu tư: cổ phiếu, trái phiếu, hàng hoá, bất động sản, công cụ tương đương tiền mặt, hay các tài sản khác bởi nhà đầu tư cá nhân hay nhà đầu tư tổ chức. Mục đích của danh mục đầu tư là làm giảm rủi ro bằng cách đa dạng hoá các loại hình đầu tư.

Chiến lược đầu tư (Trading strategies) là chiến lược phân bổ vốn đầu tư (xây dựng danh mục đầu tư) nhằm đạt mục đích đầu tư.

Chiến lược tự điều chỉnh tài chính (Self-financing strategies) là chiến lược đầu tư mà không có nguồn tài chính được thêm vào hoặc rút ra từ nguồn đầu tư gốc. Chi phí để giành được thêm một số đơn vị chứng khoán trong danh mục đầu tư mới được đảm bảo tài chính bởi việc bán một vài đơn vị chứng khoán khác trong danh mục đầu tư cũ.

Nguyên lý không cơ lợi (không mua bán song hành-Nonarbitrage Principle): Một yêu cầu cơ bản trong các mô hình định giá tài chính hợp lý là không có các cơ hội cơ lợi (cơ hội đầu cơ trục lợi), mà được gọi là *nguyên lý không cơ lợi* hay còn gọi là *không mua bán song hành*. Như một ví dụ cho một cơ hội cơ lợi, giả sử giá của một chứng khoán đã cho trong các thị trường A và B là 99 USD và 101 USD tương ứng. Giả sử không có chi phí giao dịch, người ta có thể khoá lợi nhuận rủi ro là 2 USD cho một cổ phiếu bằng cách mua tại A với giá 99 USD và bán tại B với giá 101 USD. Nhà môi giới, người mà tiến hành mỗi giao dịch, được gọi là một *người cơ lợi*. Nếu thị trường tài chính hoạt động đúng, mỗi cơ hội cơ lợi không thể xảy ra vì nhà môi giới rất tỉnh táo và họ phản ứng lại ngay lập tức để cạnh tranh trong mỗi một cơ hội. Tuy nhiên, khi có chi phí giao dịch, một sự khác biệt nhỏ trong giá cả có thể vẫn

còn. Ví dụ, nếu chi phí giao dịch cho mua và bán trong cả hai thị trường A và B là $1,5$ USD, thì tổng chi phí giao dịch là 3 USD cho một cổ phiếu sẽ khấu trừ vận may của người mua bán song hành trong cơ hội cơ lợi do sự sai khác giá cổ phiếu là 2 USD.

Một cơ hội cơ lợi có thể định nghĩa như một chiến lược mua bán tự điều chỉnh tài chính không yêu cầu đầu tư ban đầu, không có khả năng giá trị âm tại thời điểm đáo hạn, và còn có khả năng đạt lợi suất dương.

Phòng hộ (Hedging): Nếu người phát hành quyền chọn mua không đồng thời sở hữu bất kỳ một lượng tài sản cơ bản nào, thì anh ta gọi là một *vị thế trần* (naked position) vì anh ta có thể thắng lợi lớn mà không cần phòng hộ khi giá tài sản tăng lên đột ngột. Tuy nhiên, nếu người phát hành quyền chọn sở hữu một lượng tài sản cơ bản nào đó, sự thua lỗ trong vị thế ngắn hạn của quyền chọn mua khi giá tài sản tăng có thể được đền bù bởi lời lãi kiếm được trong vị thế dài hạn của tài sản cơ bản. Chiến lược này được gọi là phòng hộ, ở đó sự rủi ro trong danh mục đầu tư được giám sát bởi hai mặt đối lập trong hai tài sản mà có tương quan âm với nhau. Trong một trạng thái phòng hộ hoàn chỉnh, người phòng hộ phối hợp một quyền chọn rủi ro và một tài sản cơ bản rủi ro theo một tỷ lệ thích hợp dạng một vị thế rủi ro mà biểu diễn giống như một trái phiếu tự do mặc định kiếm được lãi suất rủi ro. Nguyên lý phòng hộ rủi ro là nền tảng của lý thuyết định giá quyền chọn mà chúng ta sẽ nghiên cứu sau này.

1.2 Các tính toán tài chính cơ bản

1.2.1 Một số nghiệp vụ tài chính

Tiền lãi (interest)

Tiền lãi là một khái niệm được xem xét dưới hai góc độ khác nhau: góc độ của người cho vay và của người đi vay.

- Ở góc độ người cho vay hay nhà đầu tư vốn, tiền lãi là số tiền tăng thêm trên số vốn đầu tư ban đầu trong một khoảng thời gian nhất định. Khi nhà đầu tư đem đầu tư một khoản vốn, nhà đầu tư sẽ thu được một giá trị trong tương lai lớn hơn giá trị đã bỏ ra ban đầu và khoản chênh lệch này được gọi là tiền lãi.

- Ở góc độ người đi vay hay người sử dụng vốn, tiền lãi là số tiền mà người đi vay phải trả cho người cho vay (là người chủ sở hữu vốn) để được sử dụng vốn trong một thời gian nhất định.

Khoản tiền đi vay (hay bỏ ra để cho vay) ban đầu gọi là vốn gốc. Số tiền nhận được từ khoản vốn gốc sau một khoảng thời gian nhất định gọi là giá trị tích luỹ. Trong thời gian cho vay, người cho vay có thể gặp phải những rủi ro như: người vay không trả lãi hoặc không hoàn trả vốn vay. Những rủi ro này sẽ ảnh hưởng đến tiền lãi mà người cho vay dự kiến trong tương lai.

Lãi suất (interest rate)

Lãi suất là tỷ số giữa tiền lãi thu được (phải trả) so với vốn đầu tư (vốn vay) trong một đơn vị thời gian.

$$\text{Lãi suất} = \frac{\text{Lãi thu được (phải trả) trong một đơn vị thời gian}}{\text{Vốn gốc}}$$

Đơn vị thời gian là năm (trừ trường hợp cụ thể khác).

Lãi đơn (Simple Interest)

Về phương diện tài chính, lãi là khoản tiền sinh ra từ khoản vốn đã bỏ ra trong quá trình đầu tư (chẳng hạn: cho vay, đầu tư sản xuất, kinh doanh, ...) sau một thời gian xác định. Phương thức tính lãi theo lãi đơn là phương thức tính toán mà tiền lãi sau mỗi kỳ không được nhập vào vốn để tính lãi cho kỳ sau. Tiền lãi của mỗi kỳ đều được tính theo vốn gốc ban đầu và đều bằng nhau. Số tiền lãi phụ thuộc trực tiếp vào: Số vốn, thời gian đầu tư và lãi suất.

Nếu ta gọi C_0 là số vốn ban đầu, r là lãi suất của 100 đơn vi tiền tệ, T là thời hạn tính theo năm, I là số tiền lãi, thì công thức tổng quát để tính số lãi đơn như sau:

$$I = \frac{C_0 \times r \times T}{100}.$$

Trong trường hợp độ dài thời gian tính theo tháng, ngày thì trong công thức trên ta thay $T = \frac{m}{12}$ hoặc $T = \frac{n}{360}$ tương ứng với m, n là số tháng, số ngày đầu tư (Quy ước mỗi năm 360 ngày và mỗi tháng 30 ngày, trong một số trường hợp cụ thể, có thể tính số ngày chính xác của đầu tư và quy định số ngày của mỗi năm là 365 đối với năm thường và 366 đối với năm nhuận).

Ví dụ 1.2.1. Một khoản vốn gốc là 5 triệu VND được đầu tư trong 3 năm với lãi suất đơn là 7%/năm. Giá trị tích luỹ của khoản vốn này vào cuối năm thứ 3 là:

$$C_0 \times (1 + 3 \times r) = 5(1 + 3 \times 0,07) = 6,05 \text{ triệu VND}.$$

Ví dụ 1.2.2. Vào ngày 08/03/2006, một người đầu tư gửi vào ngân hàng 40 triệu VND với lãi suất đơn là 8%/năm và rút tiền ra vào ngày 11/09/2006 (183 ngày tính theo quy ước trên). Tiền lãi anh ta thu được là:

$$\frac{40 \times 8 \times 183}{36000} = 1,626667 \text{ triệu VND.}$$

Ví dụ 1.2.3. Một người đầu tư gửi 30 triệu VND vào ngân hàng với lãi suất 8,2%/năm.

Số tiền của người đó sau 45 ngày là:

$$30 + \frac{30 \times 8,2 \times 45}{36000} = 30,3075 \text{ triệu VND.}$$

Số tiền của người đó sau 1 năm là:

$$30 + \frac{30 \times 8,2 \times 1}{100} = 32,46 \text{ triệu VND.}$$

Chiết khấu theo lãi đơn

Nghiệp vụ chiết khấu thường được áp dụng cho các thương phiếu (kỳ phiếu thương mại).

Thương phiếu là chứng từ biểu thị một quan hệ tín dụng, một nghĩa vụ trả tiền được lập ra trên cơ sở các giao dịch thương mại. Tuỳ theo luật pháp của từng nước mà thương phiếu có thể gồm toàn bộ hay một số loại sau: hối phiếu, lệnh phiếu, séc, phiếu lưu kho.

Hối phiếu: Là một tờ lệnh trả tiền vô điều kiện của một người (được gọi là người ký phát) gửi cho người khác (gọi là người bị phát) để yêu cầu người này trả ngay hay trả trong một thời hạn xác định số tiền ghi trên hối phiếu cho chính người ký phát hoặc cho một người xác định được gọi là người được hưởng.

Lệnh phiếu: Là một giấy cam kết vô điều kiện do một người lập ký tên, gửi cho một người khác, cam kết mình sẽ trả, vào lúc xuất trình hoặc vào một ngày cố định một khoản tiền cho người đó hoặc cho người được hưởng.

Séc: Là tờ lệnh trả tiền vô điều kiện của người chủ tài khoản tiền gửi không kỳ hạn tại ngân hàng, ký phát cho ngân hàng, yêu cầu ngân hàng này chi trả số tiền ghi trên séc cho người được hưởng.

Phiếu lưu kho: Là chứng từ do người chủ kho công cộng hoặc do người phụ trách cảng cấp cho chủ hàng hóa, xác nhận đã nhận hàng hóa để lưu kho.

Phiếu lưu kho là một chứng từ sở hữu hàng hóa có thể được chuyển nhượng bằng cách ký hậu và trao tay.

Chiết khấu theo lãi đơn: Là nghiệp vụ qua đó ngân hàng dành cho khách hàng được quyền sử dụng cho đến kỳ hạn của thương phiếu một khoản tiền của thương phiếu sau khi đã trừ khoản lãi phải thu (tức tiền chiết khấu và các khoản chi phí chiết khấu).

Mệnh giá: Là khoản tiền được ghi trên thương phiếu, ký hiệu: C.

Giá trị hiện tại: Là khoản tiền sau khi đã khấu trừ chiết khấu, ký hiệu: V.

Ký hiệu E là số tiền chiết khấu, ta có: $V = C - E$.

Thường có hai loại chiết khấu: Chiết khấu thương mại (ký hiệu Ec) và chiết khấu hợp lý (ký hiệu Er)

$$Ec = \frac{C \times r \times n}{36000}, \quad V = C - Ec$$

$$Er = \frac{V' \times r \times n}{36000}. \quad C = V' + Er$$

trong đó n là số ngày giao dich và

$$V' = \frac{36000 \times C}{36000 + r \times n}.$$

Từ đó:

$$Er = \frac{C \times r \times n}{36000 + r \times n}.$$

Ví dụ 1.2.4. Một thương phiếu có thời hạn 45 ngày, nếu chiết khấu theo phương pháp hợp lý với lãi suất 2,5%/năm thì tiền chiết khấu của thương phiếu là 85,25 nghìn VND. Mệnh giá của thương phiếu đó là:

$$C = \frac{Er \times (36000 + r \times n)}{r \times n} = \frac{85,25 \times (36000 + 2,5 \times 45)}{2,5 \times 45} = 27365,24 \text{ nghìn VND.}$$

Lãi gộp (Composed Interest)

Một khoản vốn (gửi ngân hàng) được hưởng lãi gộp khi sau kỳ gửi ban đầu tiền lãi thu được sẽ được gộp vào khoản vốn ban đầu và chính khoản lãi đó lại tạo ra số lãi ở thời kỳ tiếp theo và tiếp tục như vậy cho đến kỳ gửi cuối cùng. Như vậy, phương thức tính lãi theo lãi gộp là phương thức tính toán mà tiền lãi sau mỗi kỳ được nhập vào vốn để đầu tư tiếp và sinh lãi cho kỳ sau. Thông thường, đối với các giao dịch tài chính, lãi suất được sử dụng là lãi gộp.

Người ta gọi đó là trường hợp lãi được vốn hoá.

Ví dụ 1.2.5. Một người đầu tư gửi 10 triệu VND vào ngân hàng và hưởng lãi suất 5%/năm. Đến cuối năm thứ nhất ông ta được lãi 0,5 triệu VND để gộp vào khoản vốn ban đầu thành 10.5 triệu VND. Đến cuối năm thứ hai ông ta lại gộp thêm khoản lãi 0,525 triệu VND và có $10,5 + 0,525 = 11,025$ triệu VND. Khoản vốn này đến cuối năm thứ 3 sẽ được khoản lãi 0,55125 triệu VND. Vậy nếu người đầu tư gửi trong 3 năm thì người đó sẽ nhận được khoản tiền là: $11,025 + 0,55125 = 11,57625$ triệu VND.

Một cách tổng quát ta có công thức tính số tiền thu được theo lãi gộp C_n sau n thời kỳ như sau:

$$C_n = C_0 \times (1 + r)^n \tag{1.1}$$

hay dưới dạng logarit:

$$\log C_n = \log C_0 + n \log(1 + r),$$

trong đó C_0 là số vốn ban đầu, n là số thời kỳ gửi vốn (tương ứng với thời kỳ của lãi suất), r là lãi suất của một đơn vị tiền tệ.

Nếu goi I_n là số lãi cho đến cuối thời kỳ thứ n, ta có:

$$I_n = C_n - C_0 = C_0 \times (1 + r)^n - C_0 = C_0 \times [(1 + r)^n - 1].$$

Ví dụ 1.2.6. Một khoản vốn gốc là 5 triệu VND được đầu tư trong 3 năm với lãi suất gộp 7%/năm. Giá trị tích luỹ của khoản vốn này vào cuối năm thứ 3 là:

$$C_0 \times (1 + r)^3 = 5 \times (1 + 0,07)^3 = 6,125215 \text{ triệu VND}.$$

Ví dụ 1.2.7. Một người đầu tư gửi 10 triệu VND vào ngân hàng với lãi suất 5%/năm và số lãi gộp vào vốn 6 tháng một lần. Tính số tiền thu được của người đó sau 8 năm.
Giải: Do lãi gộp vào vốn 6 tháng một lần nên lãi suất của một đơn vị tiền tệ là $r = 0,025$ và số thời kỳ lãi gộp vào vốn là $n = 16$. Theo công thức (1.1), số tiền thu được của người đó sau 8 năm là:

$$C_{16} = 10 \times (1 + 0,025)^{16} = 14,84506 \text{ triệu VND}.$$

Ví dụ 1.2.8. Một người đầu tư mong muốn thu được 37.0061 triệu VND sau 10 năm. Tính số vốn người đó phải đầu tư biết lãi suất là 4%/năm.
Giải: Từ công thức (1.1), số vốn người đó cần đầu tư là:

$$C_0 = \frac{37,0061}{(1 + 0,04)^{10}} = 25 \text{ triệu VND}.$$

Chiết khấu theo lãi gộp

Trong nghiệp vụ tài chính dài hạn (trên một năm), việc sử dụng nghiệp vụ chiết khấu thương mại là không phù hợp vì nó dẫn đến sai số lớn; vì vậy, người ta chỉ sử dụng nghiệp vụ chiết khấu hợp lý theo lãi gộp để tính số tiền chiết khấu từ giá trị hiện tại hợp lý.

Gọi E là số tiền chiết khấu theo lãi gộp, V'' là giá trị hiện tại hợp lý của thương phiếu, $r_{V''}$ là số lãi gộp của V'', n là số thời kỳ gửi vốn. Ta có:

$$C = V'' + r_{V''} = V'' + V'' \times [(1+r)^n - 1] = V'' \times (1+r)^n.$$

Do vậy:

$$V'' = \frac{C}{(1+r)^n} \text{ (công thức hiện tại hoá một khoản vốn).}$$

Từ đó ta có:

$$E = C - V'' = C - \frac{C}{(1+r)^n} = \frac{C[(1+r)^n - 1]}{(1+r)^n}.$$

Ví dụ 1.2.9. Một thương phiếu 15 triệu VND có thời hạn 5 năm, được chiết khấu theo lãi suất chiết khấu 6,5%/năm. Tính giá trị hiện tại của thương phiếu đó và số tiền chiết khấu.

Giải: Giá trị hiện tại của thương phiếu:

$$V'' = \frac{15}{(1+0,065)^5} = 10,9482 \text{ triệu VND.}$$

Số tiền chiết khấu:

$$E = 15 - 10,9482 = 4,0518 \text{ triệu VND.}$$

Ví dụ 1.2.10. Một chứng khoán có giá 25 triệu VND được chiết khấu với lãi suất 8%/năm. Tính thời hạn của chứng khoán đó, biết giá trị hiện tại của nó là 19,111 triệu VND.

Giải: Ta có

$$19,111 = \frac{25}{(1+0,08)^n}.$$

Suy ra

$$n = \log_{(1,08)}\left(\frac{19,111}{25}\right).$$

Do đó $n = 3,5$ năm.

	A	B	C	D	E
1			Table 1.1		
2	Tỷ lệ chiết khấu	10%			
3	Giá trị hiện tại	$379,08	◄-------=NPV(B2,B7:B11)		
4					
5					
6	Năm	Dòng tiền			
7	1	100			
8	2	100			
9	3	100			
10	4	100			
11	5	100			

Hình 1.2: Bảng 1.1.

1.2.2 Giá trị hiện tại và giá trị hiện tại ròng

Một nghiệp vụ quan trọng trong tài chính là xác định giá trị hiện tại của các dòng tiền nhận được theo thời gian. Việc nhận được tiền mặt (hay dòng tiền như chúng ta hay gọi) có thể phi ngẫu nhiên hoặc ngẫu nhiên. Cả hai khái niệm, giá trị hiện tại (Present Value - PV) và giá trị hiện tại ròng (Net Present Value - NPV), đều liên quan đến giá trị hôm nay của các dòng tiền mặt trong tương lai. Giả sử chúng ta định giá một khoản đầu tư 100 USD/năm vào cuối năm này và trong 4 năm tới; giả sử có 5 lần thanh toán, mỗi lần 100 USD, chắc chắn sẽ được thực hiện. Nếu ngân hàng trả lãi suất hàng năm 10% trong thời hạn 5 năm thì lãi suất 10% này chính là chi phí cơ hội của khoản đầu tư, là lợi nhuận để chúng ta so sánh các lựa chọn đầu tư. Chúng ta có thể xác định giá trị của khoản đầu tư bằng cách chiết khấu các dòng tiền mặt với chi phí cơ hội là tỷ lệ chiết khấu (xem bảng 1.1). Giá trị hiện tại (PV) 379,08 USD chính là giá trị hôm nay của khoản đầu tư. Giả sử khoản đầu tư này được đem bán với giá 400 USD. Rõ ràng chúng không đáng giá để mua, bởi vì so với lợi nhuận thay thế hưởng lãi suất 10% (tỷ lệ chiết khấu), khoản đầu tư này chỉ đáng giá 379,08 USD. Ở đây, chúng ta phải áp dụng khái niệm giá trị hiện tại ròng (NPV). Gọi r là tỷ lệ chiết khấu của đầu tư thì NPV được tính như sau:

$$NPV = CF_0 + \sum_{t=1}^{N} \frac{CF_t}{(1+r)^t},$$

trong đó CF_t là dòng tiền mặt của việc đầu tư tại thời điểm t và CF_0 là dòng tiền mặt hiện tại (xem bảng 1.2).

Chú ý 1.2.1. *Ngôn ngữ Excel về dòng tiền mặt chiết khấu khác với ngôn ngữ*

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Tỷ lệ chiết khấu	10%						
2	Tỷ lệ nội hoàn (IRR)	7,931%	=IRR(B6:B11)					
3	Giá trị hiện tại thuần (NPV)	-$20,92		=B6+NPV(B1;B7:B12)				
4								
5	Năm	Dòng tiền						
6	0	-400						
7	1	100						
8	2	100						
9	3	100						
10	4	100						
11	5	100						
12								
13	BẢNG VAY							
14	=-B6	Vốn gốc	Thanh toán	Phần chia thanh toán				
15		đầu năm	cuối mỗi	thành trả gốc và trả lãi				
16	Năm		năm	Lãi	Gốc			
17	1	400	100	31,72	68,28		=C17-D17	
18	2	331,72	100	26,31	73,69			
19	3	258,03	100	20,46	79,54			
20	4	178,50	100	14,16	85,84			
21	5	92,65	100	7,35	92,65			
22								
23	=B17-E17		=$B$2*B17					

Hình 1.3: Bảng 1.2.

trong thuật ngữ tài chính tiêu chuẩn. Excel sử dụng các chữ cái NPV để chỉ giá trị hiện tại (chứ không phải giá trị hiện tại ròng) của các dòng tiền mặt. Muốn sử dụng Excel để xác định giá trị hiện tại ròng tài chính của các dòng tiền mặt, chúng ta phải tính giá trị hiện tại của các dòng tiền mặt tương lai (sử dụng chức năng Excel NPV) rồi trừ đi dòng tiền tại thời điểm 0 *(thông thường đây là chi phí của tài sản đang sử dụng).*

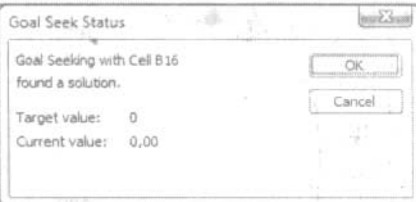
1.2.3 Tỷ lệ nội hoàn và bảng vay

Chúng ta tiếp tục với bài toán ở mục trên. Giả sử chúng ta trả 400 USD cho dòng tiền mặt này. Tỷ lệ nội hoàn (IRR) được xác định như tỷ lệ lãi gộp (r) sao cho giá trị hiện tại của dòng tiền (NPV) bằng 0:

$$CF_0 + \sum_{t=1}^{N} \frac{CF_t}{(1+r)^t} = 0.$$

Hàm IRR của Excel sẽ giải quyết vấn đề này. IRR là tỷ lệ hoàn vốn hỗn hợp của khoản đầu tư. Lưu ý rằng IRR bao gồm tất cả các khoản tiền mặt trong

	A	B	C	D	E	F
1						
2	Chi phí	-1000				
3	IRR?	24,44%				
4						
5						
6						
7	BẢNG VAY					
8	=-B2	Vốn gốc	Thanh toán	Phân chia thanh toán		
9		đầu năm	cuối mỗi	thành trả gốc và trả lãi		
10	Năm		năm	Lãi	Gốc	
11	1	1000	300	244,36	55,64	=C11-D11
12	2	944,36	200	230,76	-30,76	
13	3	975,13	150	238,28	-88,28	
14	4	1063,41	600	259,86	340,14	
15	5	723,26	900	176,74	723,26	
16	6	0,00				
17	=B11-E11		=$B$3*B11			



Hình 1.4: Bảng 1.3.

đầu tư, kể cả khoản tiền mặt thứ nhất của quá trình này (trường hợp này là số - 400, xem bảng 1.2).

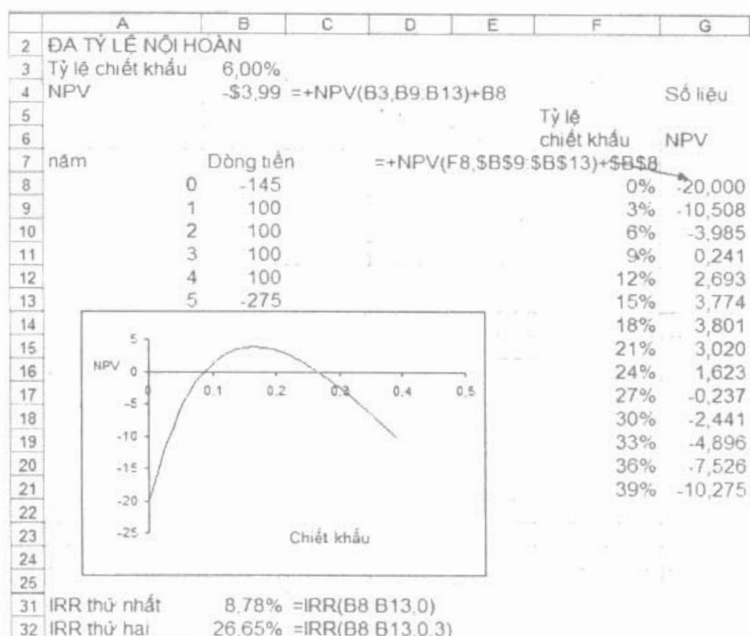
Bảng vay chia mỗi thanh toán tài sản thành phần tiền lãi và phần vốn gốc hoàn trả. Tiền lãi cuối mỗi năm bằng tỷ lệ IRR nhân với vốn gốc vào đầu năm. Vốn gốc của đầu năm cuối cùng (trong ví dụ trên là 92,65 USD - xem bảng 1.2) phải đúng bằng tiền trả vốn gốc vào cuối năm đó.

Chúng ta hoàn toàn có thể sử dụng bảng vay để tìm tỷ lệ nội hoàn. Hãy xem xét một đầu tư hiện tại với chi phí 1000 USD mà sẽ được hoàn trả toàn bộ vào cuối các năm thứ 1, 2, ..., 5 với lãi suất dự kiến là 15%. Theo ví dụ trên, tỷ lệ IRR của khoản đầu tư này sẽ lớn hơn 15%. Trong ví dụ này chúng ta thêm ô (B16). Nếu lãi suất trong ô B3 chắc chắn bằng IRR thì ô B16 phải là 0. Bây giờ chúng ta có thể sử dụng chức năng Goal Seek của Excel (nằm trong thanh công cụ Tools) để xác định IRR (xem kết quả trong bảng 1.3).

1.2.4 Tỷ lệ nội hoàn hỗn hợp

Dòng tiền mặt đôi khi có hơn một giá trị IRR. Trong ví dụ sau, chúng ta có thể nói rằng dòng tiền mặt trong các ô từ B35:B40 có 2 giá trị IRR do đồ thị NPV cắt trục hoành tại 2 điểm (xem bảng 1.4).

Hàm IRR của Excel cho phép chúng ta được thêm một tham số để tìm cả 2 IRR. Thay vì viết IRR(B8:B13), chúng ta viết (B8:B13, biến dự báo). Biến dự báo là tham số bắt đầu cho thuật toán mà Excel sử dụng để tìm IRR; bằng



	A	B	C	D	E	F	G
2	ĐA TỶ LỆ NỘI HOÀN						
3	Tỷ lệ chiết khấu	6,00%					
4	NPV	-$3,99	=+NPV(B3,B9:B13)+B8				Số liệu
5						Tỷ lệ	
6						chiết khấu	NPV
7	năm	Dòng tiền		=+NPV(F8,$B$9:$B$13)+$B$8			
8	0	-145				0%	-20,000
9	1	100				3%	-10,508
10	2	100				6%	-3,985
11	3	100				9%	0,241
12	4	100				12%	2,693
13	5	-275				15%	3,774
14						18%	3,801
15						21%	3,020
16						24%	1,623
17						27%	-0,237
18						30%	-2,441
19						33%	-4,896
20						36%	-7,526
21						39%	-10,275
22							
23							
24							
25							
31	IRR thứ nhất	8,78%	=IRR(B8:B13,0)				
32	IRR thứ hai	26,65%	=IRR(B8:B13,0.3)				

Hình 1.5: Bảng 1.4.

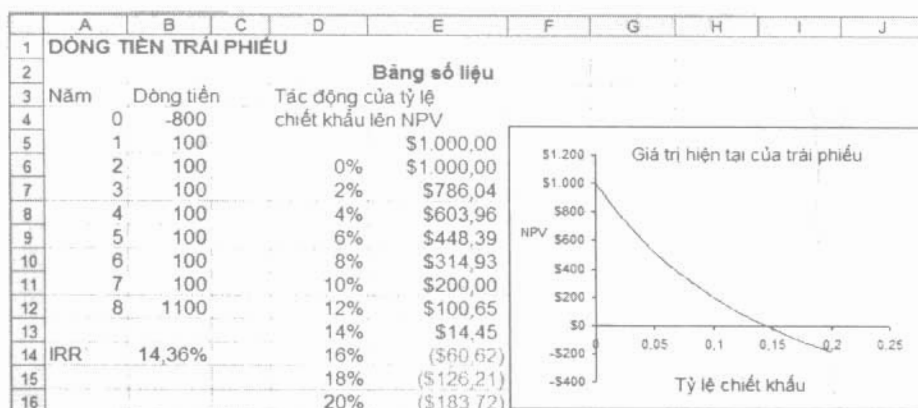
cách điều chỉnh biến dự báo, chúng ta có thể xác định cả 2 IRR. Ô B32 và B33 minh họa cho điều đó.

Về thao tác trên, chúng ta cần lưu ý 2 điều:

1. Biến dự báo ít khi sát với IRR do chúng không duy nhất. Trong ví dụ, đặt biến dự báo bằng 0,1 và 0,5, chúng ta vẫn sẽ có kết quả IRR giống như trên.

2. Để xác định số và giá trị xấp xỉ của các IRR, việc sử dụng biến dự báo cho phép nhận được tiện ích nhờ đồ thị NPV của khoản đầu tư như là một hàm của các tỷ lệ chiết khấu (như chúng ta đã làm): Khi đó, tỷ lệ nội hoàn là những điểm mà đồ thị cắt tại trục hoành, và vị trí gần những điểm này được sử dụng như biến dự báo trong hàm IRR.

Xét từ quan điểm kỹ thuật, dòng tiền mặt có thể có IRR phức hợp chỉ khi có ít nhất 2 lần thay đổi dấu. Nhiều dòng tiền mặt "điển hình" chỉ thay đổi 1 lần dấu. Chẳng hạn, chúng ta xem xét dòng tiền mặt từ việc mua một trái phiếu có giá trị danh nghĩa 1000 USD với tỷ lệ lãi (coupon) 10%/năm, và thời gian đáo hạn 8 năm. Nếu giá thị trường hiện tại của trái phiếu là 800 USD thì dòng tiền mặt chỉ biến đổi 1 lần (từ âm của năm thứ 0 sang dương của các



	A	B	C	D	E
1	DÒNG TIỀN TRÁI PHIẾU				
2					Bảng số liệu
3	Năm	Dòng tiền		Tác động của tỷ lệ	
4	0	-800		chiết khấu lên NPV	
5	1	100			$1.000,00
6	2	100		0%	$1.000,00
7	3	100		2%	$786,04
8	4	100		4%	$603,96
9	5	100		6%	$448,39
10	6	100		8%	$314,93
11	7	100		10%	$200,00
12	8	1100		12%	$100,65
13				14%	$14,45
14	IRR	14,36%		16%	($60,62)
15				18%	($126,21)
16				20%	($183,72)

Hình 1.6: Bảng 1.5.

năm thứ 1 đến thứ 8). Vì vậy mà dòng tiền mặt đó chỉ có 1 IRR (xem bảng 1.5).

1.2.5 Lịch thanh toán những khoản như nhau

Một vấn đề khác: Bạn đi vay 10000 USD với lãi suất 7%/năm. Ngân hàng muốn bạn chọn một dãy thanh toán để trả hết cả tiền vay lẫn tiền lãi trong 6 năm. Chúng ta có thể sử dụng hàm PMT của Excel để xác định mỗi năm phải thanh toán bao nhiêu (xem bảng 1.6).

Lưu ý, chúng ta đặt "PV", thuật ngữ cho tiền gốc của khoản vay ban đầu trong Excel bằng dấu trừ. Nếu không Excel sẽ cho giá trị âm (một chút phiền toái nhỏ). Ta có thể xác nhận kết quả trên bằng cách tạo ra bảng vay (bạn đọc có thể xem như một bài tập).

1.2.6 Giá trị tương lai và áp dụng

Chúng ta bắt đầu với một trường hợp phổ biến. Giả sử bạn gửi vào tài khoản 1000 USD với thời hạn 10 năm và tài khoản đó được hưởng mức lãi suất 10%/năm. Vậy đến cuối năm thứ 10 bạn sẽ có bao nhiêu tiền? Theo như bảng 1.7 dưới đây, số tiền đó sẽ là 2593,74 USD.

Giá trị tương lai của 1000 USD trong 10 năm với lãi suất hàng năm 10%/năm cũng có thể được tính trực tiếp như sau:

$$FV = 1000 \times (1 + 10\%)^{10} = 2593,74.$$

	A	B	C	D	E	F	G
1			LỊCH THANH TOÁN				
2							
3	Vay gốc	10000					
4	Lãi suất	7,00%					
5	Thời gian trả hết nợ	6					
6	Trả hàng năm	$2 097,96	=PMT(B4,B5,-B3,0)				

Function Arguments

PMT

Rate	B4	= 0,07
Nper	B5	= 6
Pv	-B3	= -10000
Fv		=
Type		=

= 2097,957998

Calculates the payment for a loan based on constant payments and a constant interest rate.

Pv is the present value: the total amount that a series of future payments is worth now.

Formula result = 2097,957998

Help on this function OK Cancel

Hình 1.7: Bảng 1.6.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Giá trị tương lai đơn giản					
2							
3	Lãi suất	10,00%					
4							
5	Năm	Cân đối TK	Lãi thu	Tổng dư TK			
6		đầu năm	trong năm	cuối năm			
7	=D8			=$B$3*B8			
8	0	1000	100	1100			
9	1	1100	110	1210	=B8+C8		
10	2	1210	121	1331			
11	3	1331	133,1	1464,1			
12	4	1464,1	146,41	1610,51			
13	5	1610,51	161,051	1771,56			
14	6	1771,561	177,1561	1948,72			
15	7	1948,7171	194,87171	2143,59			
16	8	2143,5888	214,35888	2357,95			
17	9	2357,9477	235,79477	2593,74			
18	10	2593,7425					

Hình 1.8: Bảng 1.7.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		**Giá trị tương lai của khoản tiền gửi hàng năm**						
2								
3	Lãi suất	10%						
4								
5	Năm	Cân đối TK	Tiền gửi	Lãi thu	Số dư			
6		đầu năm	đầu năm	trong năm	cuối năm			
7							=(B8+C8)*$B$3	
8	0	0	1000	100	1100		=B8+C8+D8	
9	1	1100	1000	210	2310			
10	2	2310	1000	331	3641			
11	3	3641	1000	464,1	5105			
12	4	5105,1	1000	610,51	6716			
13	5	6715,61	1000	771,561	8487			
14	6	8487,171	1000	948,7171	10436			
15	7	10435,89	1000	1143,5888	12579			
16	8	12579,48	1000	1357,9477	14937			
17	9	14937,42	1000	1593,7425	17531			
18	10	17531,17						
19			=E8					
20	Giá trị tương lai:			$17.531,2		=FV(B3,A18,-1000,,1)		

Hình 1.9: Bảng 1.8.

Bây giờ chúng ta xem xét trường hợp sau phức tạp hơn một chút: bạn dự định mở tiếp một tài khoản tiết kiệm. Tiền gửi ban đầu của bạn trong năm nay là 1000 USD và vào đầu các năm thứ 1, 2, đến 9 cũng như vậy. Nếu lãi suất hàng năm 10% thì đến đầu năm thứ 10 trong tài khoản của bạn sẽ có bao nhiêu tiền? Trường hợp này có thể dễ dàng lập bằng Excel (xem bảng 1.8).

Vì vậy, theo bảng 1.8, vào đầu năm thứ 10 chúng ta sẽ có 17531,17 USD trong tài khoản. Chúng ta cũng có thể thu được kết quả tương tự bằng áp dụng công thức tính tổng các giá trị tương lai của mỗi khoản tiền gửi.

Tổng số tiền vào đầu năm thứ 10 là:

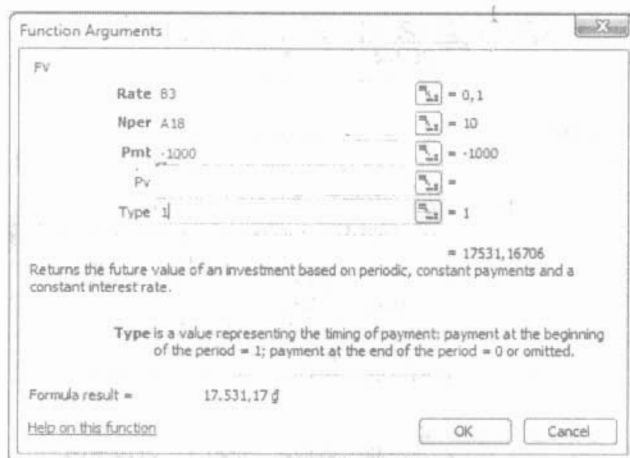
$$1000\times(1+10\%)^{10}+1000\times(1+10\%)^{9}+\ldots+1000\times(1+10\%)^{t}=\sum_{t=1}^{10}1000\times(1+10\%)^{t}.$$

Lưu ý rằng trong ô D20 của Excel có chức năng FV tính tổng này. Hộp thoại của chức năng FV có dạng như trong bảng 1.9.

Về chức năng này chúng ta lưu ý 3 điều sau:

1. Chức năng FV sẽ cho lãi âm đối với khoản tiền gửi dương. Có thể giải thích cho việc tại sao lại đặt chương trình thực hiện chức năng theo cách này, nhưng nhìn chung cũng không rõ ràng. Vì vậy, để tránh các con số âm, chúng ta đặt **Pmt** bằng -1000.

2. Dòng PV trong hộp thoại áp dụng cho trường hợp tài khoản có giá trị



Hình 1.10: Bảng 1.9.

ban đầu khác 0 khi tiến hành gửi tiền. Trong ví dụ này, dòng này được đặt bên trái, chỉ rằng giá trị tài khoản ban đầu bằng 0.

3. Như chúng ta thấy trong hộp thoại, "Type" (bằng 1 hoặc 0) chỉ việc gửi tiền được thực hiện vào đầu hay cuối mỗi thời kỳ.

1.2.7 Tiền lương và ảnh hưởng đến giá trị tương lai

Ta xét một ví dụ điển hình: Giả sử hiện nay bạn 55 tuổi và dự định về hưu khi 60 tuổi. Để đảm bảo tài chính khi về hưu, bạn dự định mở một tài khoản hưu trí:

\+ Vào đầu các năm thứ 0, 1, 2, đến 4 (chẳng hạn bắt đầu từ hôm nay và trong 4 năm tiếp theo), bạn dự định gửi tiền vào tài khoản hưu trí và được hưởng lãi suất 8%/năm.

\+ Đến 60 tuổi khi về hưu, bạn dự đoán sẽ phải sống thêm 8 năm nữa (tất nhiên là bạn còn muốn sống lâu hơn thế!). Trong mỗi năm này, bạn muốn rút 30000 USD từ tài khoản hưu trí và số dư tài khoản vẫn sẽ tiếp tục được hưởng lãi suất 8%/năm.

Vậy hàng năm bạn sẽ phải gửi bao nhiêu tiền vào tài khoản? Bảng tính 1.10 sau đây sẽ chỉ ra cách mà bạn có thể dễ dàng bị nhầm trước vấn đề này. Trong trường hợp này, bạn tính toán rằng trong vòng 8 năm để mỗi năm có 30000 USD, bạn cần gửi vào mỗi năm 240000/5 = 48000 USD trong 5 năm đầu tiên. Theo bảng tính, sau 8 năm bạn sẽ có rất nhiều tiền (lý do là bạn đã

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Bài toán lương hưu					
2								
3	Lãi suất	8,00%						
4	Tiền gửi hàng năm	29387						
5	Lương hưu hàng năm	30000				=(D10+C10)*$B$3		
6								
7		Năm	Cân đối	Tiền gửi	Lãi thu	Số dư		
8			đầu năm	đầu năm	trong năm	cuối năm	=C10+D10+E10	
9								
10		0	0	48000	3840,00	51840,00		
11		1	51840	48000	7987,20	107827,20		
12		2	107827	48000	12466,18	168293,38		
13		3	168293	48000	17303,47	233596,85		
14		4	233597	48000	22527,75	304124,59		
15		5	304125	-30000	21929,97	296054,56		
16		6	296055	-30000	21284,36	287338,93		
17		7	287339	-30000	20587,11	277926,04		
18		8	277926	-30000	19834,08	267760,12		
19		9	267760	-30000	19020,81	256780,93		
20		10	256781	-30000	18142,47	244923,41		
21		11	244923	-30000	17193,87	232117,28		
22		12	232117	-30000	16169,38	218286,66		

Hình 1.11: Bảng 1.10.

bỏ qua ảnh hưởng rất lớn của lãi suất tính gộp, nếu trong bảng tính đặt lãi suất bằng 0 thì bạn sẽ thấy rằng bạn làm đúng).

Có 2 cách để giải quyết vấn đề này. Cách đầu tiên là sử dụng Solver của Excel trong thanh công cụ Tools. Click vào Solver, hộp thoại xuất hiện và chúng ta điền vào các giá trị đã cho. Nếu bây giờ chúng ta click vào hộp Solve, chúng ta sẽ thu được kết quả (xem bảng 1.11).

Sử dụng các công thức tài chính để giải quyết vấn đề tiền lương

Chúng ta có thể áp dụng giải pháp thông minh hơn cho vấn đề này nếu hiểu được quá trình chiết khấu. Giá trị hiện tại của toàn bộ các lần thanh toán được chiết khấu 8% phải bằng 0:

$$\sum_{t=0}^{4} \frac{\text{Tiền gửi ban đầu}}{(1,08)^t} - \sum_{t=5}^{12} \frac{30000}{(1,08)^t} = 0$$

$$\Rightarrow \text{Tiền gửi ban đầu} = \frac{\sum_{t=5}^{12} \frac{30000}{(1,08)^t}}{\sum_{t=0}^{4} \frac{1}{(1,08)^t}}.$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			**Bài toán lương hưu**					
2								
3	Lãi suất	8,00%						
4	Tiền gửi hàng năm	29387						
5	Lương hưu hàng năm	30000				=(D10+C10)*$B$3		
6								
7		Năm	Cân đối TK	Tiền gửi	Lãi thu	Số dư		
8			đầu năm	đầu năm	trong năm	cuối năm	=C10+D10+E10	
9								
10		0	0	29386,6	2350,92	31737,48		
11		1	31737,475	29386,6	4889,92	66013,95		
12		2	66013,948	29386,6	7632,04	103032,54		
13		3	103032,54	29386,6	10593,53	143012,62		
14		4	143012,62	29386,6	13791,93	186191,10		
15		5	186191,1	-30000	12495,29	168686,39		
16		6	168686,39	-30000	11094,91	149781,30		
17		7	149781,3	-30000	9582,50	129363,81		
18		8	129363,81	-30000	7949,10	107312,91		
19		9	107312,91	-30000	6185,03	83497,94		
20		10	83497,942	-30000	4279,84	57777,78		
21		11	57777,778	-30000	2222,22	30000,00		
22		12	30000	-30000	0,00	0,00		
23								
24	Tử số	126719	←	=1/(1+$B$3)^4*PV(B3,8,-30000)				
25	Mẫu số	4,31	←	=PV(B3,5,-1,,1)				
26	Tiền gửi hàng năm	29387	←	=B24/B25				

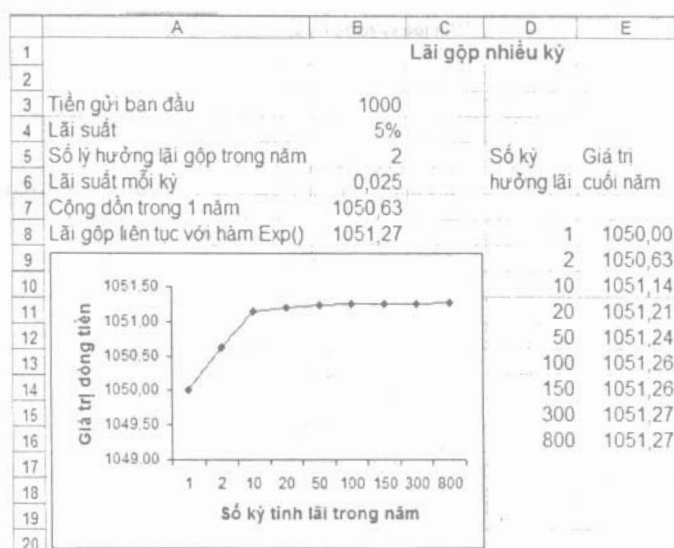
Hình 1.12: Bảng 1.11.

Chúng ta có thể sử dụng chức năng PV của Excel để tính cả tử số phía bên phải:

$$\sum_{t=5}^{12} \frac{30000}{(1,08)^t} = \frac{1}{(1,08)^4} \sum_{t=1}^{8} \frac{30000}{(1,08)^t} \text{ và mẫu số } \sum_{t=0}^{4} \frac{1}{(1,08)^t} \text{ (xem bảng 1.11).}$$

1.2.8 Lãi gộp liên tục

Giả sử bạn gửi 1000 USD vào tài khoản ngân hàng với lãi suất hàng năm 5%. Đến cuối năm bạn sẽ có $1000 \times (1,05) = 1050$ USD. Giả sử bây giờ mỗi năm ngân hàng thanh toán cho bạn 2 lần theo lãi suất 2,5%. Sau 6 tháng, bạn có 1025 USD, và sau 1 năm sẽ là $1000 \times \left(1 + \frac{0,05}{2}\right)^2 = 1050,625$ USD. Theo logic này, nếu mỗi năm bạn nhận được n lần thanh toán thì đến cuối năm tiền của bạn sẽ tăng lên $1000 \times \left(1 + \frac{0,05}{n}\right)^n = 1050,625$ USD. Số n càng lớn thì tiền của bạn sẽ càng lớn, tiến đến (rất nhanh như bạn sẽ được thấy ngay sau



	A	B	C	D	E
1			Lãi gộp nhiều kỳ		
2					
3	Tiền gửi ban đầu	1000			
4	Lãi suất	5%			
5	Số lỳ hưởng lãi gộp trong năm	2		Số kỳ	Giá trị
6	Lãi suất mỗi kỳ	0,025		hưởng lãi	cuối năm
7	Cộng dồn trong 1 năm	1050,63			
8	Lãi gộp liên tục với hàm Exp()	1051,27		1	1050,00
9				2	1050,63
10				10	1051,14
11				20	1051,21
12				50	1051,24
13				100	1051,26
14				150	1051,26
15				300	1051,27
16				800	1051,27
17					
18					
19					
20					

Hình 1.13: Bảng 1.12.

đây) bằng $e^{0,05}$ mà trong Excel sẽ sử dụng hàm Exp. Khi n dần tới vô hạn, chúng ta nhận được một quá trình lãi gộp liên tục. Như bạn thấy trong bảng 1.12, trong 1 năm với lãi suất 5% số tiền 1000 USD được lũy tiến liên tiếp đến cuối năm sẽ thành $1000 \times e^{0,05} = 1051,27$ USD. Luỹ tiến liên tiếp trong t năm, số tiền sẽ tăng lên $1000 \times e^{0,05 \times t}$ USD.

Quay trở lại vấn đề tài chính - Chiết khấu liên tục

Nếu trong quá trình luỹ tiến liên tiếp, với lãi suất r trong thời hạn t năm, số tiền tăng dần đến e^{rt} thì trong chiết khấu liên tiếp, số tiền giảm dần trong cùng kỳ là e^{-rt}. Vì vậy, dòng tiền mặt C_t hiện tại trong t năm và được chiết khấu với tỷ lệ phức hợp liên tiếp r sẽ là $C_t \times e^{-rt}$ (xem minh họa trong bảng 1.13).

Tính lãi gộp liên tục từ dữ liệu về giá

Giả sử tại thời điểm 0, bạn có 1000 USD trong ngân hàng và 1 năm sau bạn có 1200 USD. Vậy phần trăm lãi là bao nhiêu?

	B	C	D	E	F	G
24	Lãi suất	8%				
25				Giá trị hiện tại		
26		Năm	Dòng tiền	chiết khấu liên tục		
27		1	100	92,31163		
28		2	200	170,4288		
29		3	300	235,9884		
30		4	350	254,1522		
31		5	400	268,128		
32						
33	Giá trị hiện tại			1021,009	=SUM(E27.E31)	

Hình 1.14: Bảng 1.13.

Nếu mỗi năm ngân hàng chỉ thanh toán 1 lần thì lãi sẽ là 20%:

$$\frac{1200}{1000} - 1 = 20\%.$$

Tuy nhiên, nếu ngân hàng thanh toán mỗi năm 2 lần thì bạn sẽ cần áp dụng công thức sau để xác định lãi:

$$1000 \times \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 = 1200 \Rightarrow r = \left(\frac{1200}{1000}\right)^{1/2} - 1 = 9,5445\%.$$

Do đó, % lãi hàng năm khi mỗi năm được thanh toán 2 lần là:

$$2 \times 9,5445\% = 19,089\%.$$

Tóm lại, nếu mỗi năm được thanh toán n lần thì bạn sẽ có:

$$r = \left(\frac{1200}{1000}\right)^{1/n} - 1$$

và khi đó lãi hàng năm được nhân lên tương ứng. Nếu n vô cùng lớn thì kết quả hội tụ đến:

$$r = \ln\left(\frac{1200}{1000}\right) = 18,2322\%.$$

Lãi gộp và chiết khấu liên tục thường được sử dụng trong các tính toán về tài chính, tính lãi trong danh mục đầu tư và đặc biệt là các tính toán về quyền mua cổ phần. Một lý do để sử dụng lãi gộp liên tục là vì phương pháp này đưa ra kết quả nhanh. Chẳng hạn, giả sử sau 1 năm 9 tháng, vốn 1000

	A	B	C	D	E	F	G	H
37	Tiền gửi ban đầu	1000					Lãi suất năm với	
38	Giá trị cuối năm	1200					cách tính gộp n kỳ	
39	Số kỳ tính lãi	2						
40	Lãi suất năm	19,089%		=((B38/B37)^(1/B39)-1)*B39				19,089%
41							1	20,000%
42	Lãi suất liên tục	18,232%		=LN(B38/B37)			2	19,089%
43							4	18,654%
44							8	18,442%
45							20	18,316%
46							50	18,265%
47							100	18,249%
48				=(($B$38/$B$37)^(1/G41)-1)*G41				

Hình 1.15: Bảng 1.14.

USD của bạn tăng thành 1500 USD. Vậy tỷ lệ lãi hàng năm là bao nhiêu? Để trả lời câu hỏi này, cách dễ nhất và cũng phù hợp nhất là tính lãi hàng năm được gộp liên tục. Sau 1 năm 9 tháng tức 1,75 năm, lãi bằng:

$$1000 \times \exp[r \times 1,75] = 1500 \Rightarrow r = \frac{1}{1,75} \ln\left[\frac{1500}{1000}\right] = 23,1694\%.$$

1.3 Một số nghiệp vụ giao dịch chứng khoán

Ta đã biết thị trường chứng khoán là nơi mua bán các giấy tờ có giá trị như: cổ phiếu, trái phiếu, ... các mua bán này thường được thực hiện qua sở giao dịch chứng khoán. Đây là một thị trường có tổ chức chặt chẽ, tại đó, chỉ những thành viên của sở mới được mua bán cho bản thân mình hoặc cho người khác. Việc mua bán được tiến hành theo những thể lệ nhất định. Các thành viên của sở giao dịch chứng khoán được chia làm hai loại: *Người môi giới chứng khoán* và *người kinh doanh chứng khoán*.

Người môi giới chứng khoán hoạt động với tư cách là người đại lý mua hoặc bán chứng khoán cho người khác: cho công chúng, cho người môi giới chứng khoán khác hoặc cho người kinh doanh chứng khoán. Người môi giới chứng khoán không được mua chứng khoán cho mình, họ được hưởng hoa hồng môi giới quy định sẵn theo từng loại chứng khoán mua, bán.

Người kinh doanh chứng khoán hoạt động không phải với tư cách là người đại lý trung gian như người môi giới chứng khoán mà họ mua, bán chứng khoán cho bản thân mình.

Sở giao dịch chứng khoán là một loại thị trường tư bản cho vay dài hạn, tại đó người mua, bán chủ yếu là các chứng khoán dài hạn (cổ phiếu, trái phiếu). Giao dịch tại sở giao dịch chứng khoán thường mang tính chất đầu cơ.

Hàng ngày sở giao dịch chứng khoán công bố giá cả của những giao dịch mua, bán chứng khoán đã diễn ra trong ngày, trong đó bao gồm giá mở cửa và giá đóng cửa, giá thấp nhất và giá cao nhất. Thông thường giá chứng khoán được xác định cho một chứng khoán. Tất cả các nghiệp vụ trên thị trường chứng khoán đều phải gánh chịu các chi phí dù là đối với người mua hay người bán bao gồm: Hoa hồng môi giới dành cho những người môi giới, thuế của sở giao dịch, lệ phí tính trên hoa hồng môi giới.

1.3.1 Nghiệp vụ trao ngay

Việc chuyển giao chứng khoán của người bán thông qua môi giới của người bán và việc người mua trả tiền thông qua môi giới của người mua được thực hiện tức thời hoặc trong thời hạn rất ngắn. Việc chuyển giao chứng khoán và thanh toán tiền chứng khoán cũng có thể thực hiện trực tiếp giữa người môi giới chứng khoán với người kinh danh chứng khoán. Điều này tuỳ thuộc vào quy định của mỗi nước.

Người môi giới trao cho khách hàng một bảng kê mua chứng khoán hoặc bảng kê bán chứng khoán nói chi tiết về số tiền, về hoa hồng môi giới và những chi phí khác.

Ví dụ 1.3.1. Một người mua theo nghiệp vụ trao ngay 50 cổ phiếu của công ty ABC với giá 108000 VNĐ/cổ phiếu. Tính số tiền người đó phải trả biết rằng hoa hồng môi giới là 0,007, lệ phí địa phương tính 2.83% trên số tiền hoa hồng và thuế sở giao dịch tính 6% trên số tiền hoa hồng.

Giải: Số tiền của 50 cổ phiếu là $108 \times 50 = 5400$ nghìn VNĐ. Người đó phải trả thêm:

- Hoa hồng môi giới: $\dfrac{5400 \times 7}{1000} = 37,8$ nghìn VNĐ.
- Lệ phí địa phương: $\dfrac{37,8 \times 2,83}{100} = 1,07$ nghìn VNĐ.
- Thuế sở giao dịch: $\dfrac{37,8 \times 6}{100} = 32,4$ nghìn VNĐ.

Vậy người đó phải trả tổng cộng là: $5400 + 37,8 + 1,07 + 32,4 = 5472,27$ nghìn VNĐ.

1.3.2 Nghiệp vụ kỳ hạn

Trong nghiệp vụ kỳ hạn của thị trường chứng khoán, người bán và người mua thoả thuận tức thời tính chất, số lượng, giá cả của chứng khoán nhưng việc trao chứng khoán và thanh toán sẽ được thực hiện vào một ngày sau đó gọi là ngày thanh toán.

Sau việc thanh toán, người môi giới chứng khoán có trách nhiệm trình bày với khách hàng của mình về tài khoản thanh toán đã thực hiện.

Thị trường có kỳ hạn là lĩnh vực đầu cơ. Mỗi nhà đầu cơ đều hy vọng có sự biến động về giá cả chứng khoán có lợi cho mình diễn ra giữa thời điểm kết thúc giao dịch và thời điểm thanh toán, như vậy họ sẽ kiếm được một khoản lời do chênh lệch giá mà không cần bỏ vốn. Rõ ràng đây là một trò chơi mà người thắng kiếm được dựa trên sự rủi ro của người khác. Việc xây dựng chiến lược đầu tư cũng như chi phí hợp lý trong các hợp đồng để tránh rủi ro luôn được quan tâm trong thị trường. Chúng ta sẽ trở lại vấn đề này trong các chương sau.

Người ta thường phân chia các nghiệp vụ có kỳ hạn trong thị trường chứng khoán như sau:

- Nghiệp vụ có kỳ hạn dứt điểm.
- Nghiệp vụ có kỳ hạn bù hoãn mua.
- Nghiệp vụ có kỳ hạn có tiền cược.
- Nghiệp vụ phối hợp.

BÀI TẬP

Bài tập 1.1. Bạn được chào mua một tài sản có giá 600 USD mà vào cuối mỗi năm trong vòng 10 năm có dòng tiền mặt 100 USD.
a) Nếu tỷ lệ chiết khấu thích hợp của tài sản đó là 8% thì bạn có nên mua hay không?
b) Tỷ lệ IRR của tài sản đó bằng bao nhiêu?

Bài tập 1.2. Bạn đi vay 10000 USD trong 5 năm. Thanh toán vào cuối mỗi năm không thay đổi (mọi năm đều giống nhau) theo lãi suất 15%/năm. Hãy tính bảng vay đúng, biểu thị chi tiết vốn gốc và lãi của từng năm.

Bài tập 1.3. Bạn gặp một tình huống đầu tư với các điều kiện sau:
+ Chi phí đầu tư là 1000.

– Cuối năm đầu tiên, bạn đầu tư một khoản X; trong 11 năm khoản tiền đầu tư tăng theo tỷ lệ 10%/năm. Nếu tỷ lệ chiết khấu là 15%, hãy tính số tiền X bỏ ra nhỏ nhất sẽ hấp dẫn bạn để mua tài sản.

Bài tập 1.4. Hãy xác định thanh toán phải trả đều hàng năm để trả hết khoản vay 100000 USD theo thời hạn 5 năm và chịu mức lãi suất 13%/năm.

Bài tập 1.5. Bạn vay 15000 USD mua ôtô. Khoản vay này có thời hạn 48 tháng với lãi suất hàng năm 15% (ngân hàng sẽ chuyển thành lãi suất tháng 15%/12 = 1,25%/tháng). 48 lần thanh toán (được thực hiện vào cuối mỗi tháng) đều bằng nhau.
a) Hãy xác định thanh toán hàng tháng phải trả của khoản vay.
b) Trong bảng vay, hãy xác định vốn gốc còn lại vào đầu mỗi tháng và giá trị trung bình thanh toán hàng tháng của lãi và tiền hoàn trả vốn gốc.
c) Hãy chỉ ra vốn gốc vào đầu mỗi tháng là giá trị hiện tại của các thanh toán khoản vay còn lại theo lãi suất (dùng chức năng PV).

Bài tập 1.6. Bạn đang xem xét việc mua một ôtô của một nhà đại lý địa phương. Nhà đại lý đưa cho bạn lựa chọn 1 trong 2 cách thanh toán sau:
+ Bạn có thể thanh toán bằng tiền mặt 30000 USD.
– "Kế hoạch trả chậm": Bạn có thể thanh toán ngay cho nhà đại lý 5000 USD tiền mặt và 1050 USD vào cuối mỗi tháng của 30 tháng tiếp theo.

Cách khác để thanh toán cho nhà đại lý là bạn phải tiếp cận với một ngân hàng địa phương mà sẵn lòng cung cấp cho bạn một khoản vay 25000 USD mua ôtô theo lãi suất 1,25%/tháng.
a) Giả sử rằng chi phí cơ hội là 1,25%, hãy xác định giá trị hiện tại của tất cả các lần thanh toán theo kế hoạch thanh toán trả dần của nhà đại lý ôtô.
b) Nhà đại lý sẽ tính lãi suất áp dụng bao nhiêu? Hãy xác định lãi suất này bằng cách lập trước bảng tính cho toàn bộ 30 tháng và tính tỷ lệ IRR.

Bài tập 1.7. Bạn đang xem xét một kế hoạch gửi tiết kiệm theo đó vào cuối mỗi năm trong thời hạn 5 năm bạn sẽ gửi 15000 USD. Nếu đề án đưa ra mức lãi suất 10%/năm thì đến cuối năm bạn sẽ tích luỹ được bao nhiêu? Hãy xác định số tiền này bằng cách lập bảng tính thực hiện tính 2 lần, một lần sử dụng chức năng FV và một lần sử dụng bảng đơn giản thể hiện số tiền tích luỹ vào đầu mỗi năm.

Bài tập 1.8. Làm lại bài tập 1.7 nhưng lần này giả sử bạn gửi 5 lần vào đầu mỗi năm trong 4 năm liên tiếp. Vậy đến cuối năm thứ 5 bạn sẽ tích luỹ được bao nhiêu tiền?

Bài tập 1.9. Một quỹ tương hỗ đã và đang quảng cáo rằng nếu mỗi tháng trong 10 năm gần đây bạn đã gửi 250 USD thì bây giờ bạn đã có 85000 USD. Giả sử rằng vào đầu mỗi tháng trong thời hạn 240 tháng bạn thực hiện gửi tiền. hãy xác định liệu mỗi năm các nhà đầu tư thu được bao nhiêu lãi.

Gợi ý: Lập bảng tính rồi sử dụng Goal Seek. Chúng ta có thể tính lãi hàng năm theo một trong hai cách sau:

1) (1 + lãi hàng tháng)×12 − 1 : Đây là lợi nhuận hàng năm phức hợp, và cách này được dùng nhiều hơn vì nó cho phép tái đầu tư số tiền kiếm được của mỗi tháng.

2) 12× lãi hàng tháng: Phương pháp này thường được các ngân hàng sử dụng.

Bài tập 1.10. Bạn mới bước sang tuổi 35 và dự định lập vốn tiết kiệm cho việc về hưu. Trước kia, bạn nghĩ trong vòng 30 năm nữa khi về hưu (lúc ấy bạn sẽ 65 tuổi), bạn mong muốn trong 20 năm tới mỗi năm thu nhập của bạn sẽ là 100000 USD. Hãy xác định từ nay đến lúc 65 tuổi, để có nguồn tài chính cho việc về hưu bạn sẽ phải tiết kiệm bao nhiêu? Giả sử như sau:

+ Tất cả tiền tiết kiệm sẽ được hưởng lãi suất lũy tiến 10%/năm.

+ Lần thanh toán đầu tiên bạn trả ngay và lần cuối cùng vào ngày bạn bước sang tuổi 64 (30 lần thanh toán).

+ Bạn rút tiền lần đầu tiên khi bạn 65 tuổi và rút lần cuối cùng khi bạn 84 tuổi (20 lần thanh toán).

Bài tập 1.11. Bạn có 25000 USD trong tài khoản tiết kiệm của ngân hàng được hưởng mức lãi suất 5%/năm. Công việc kinh doanh của bạn cần 25000 USD, và bạn đang xem xét 2 khả năng:

a) Sử dụng tiền trong tài khoản tiết kiệm của bạn.

b) Vay tiền của ngân hàng theo lãi suất 6%/năm mà vẫn giữ tiền trong tài khoản tiết kiệm.

Nhà phân tích tài chính của bạn đề xuất chọn cách (b). Giải thích của anh ấy là: Tổng số tiền lãi phải trả cho lãi suất 6%/năm thấp hơn số tiền thu được từ khoản tiền gửi 25000 USD trong cùng kỳ. Theo bạn giải thích này có đúng không? Hãy lập bảng tính minh hoạ.

Chương 2

Mô hình ngẫu nhiên trong tài chính với thời gian rời rạc

Chương này trình bày những khái niệm cơ bản của thị trường tài chính dưới dạng các mô hình ngẫu nhiên. Các mô hình này được mô tả dựa trên các quá trình ngẫu nhiên. Để đơn giản, chúng ta chỉ xét các quá trình ngẫu nhiên với thời gian rời rạc và minh họa bởi mô hình nhị phân.

2.1 Mô hình nhị phân

Trong mục này, chúng ta xét một mô hình đơn giản mô tả giá chứng khoán gọi là *mô hình nhị phân*. Mô hình này sẽ như một cầu nối giữa lý thuyết quá trình ngẫu nhiên và các quá trình tài chính, đồng thời cung cấp một công cụ hữu ích để nghiên cứu lý thuyết định giá cơ lợi (arbitrage) và lý thuyết xác suất.

Xét một mô hình nhị phân mô tả giá chứng khoán trong thời gian rời rạc, tại mỗi bước thời gian giá chứng khoán sẽ thay đổi thành một trong hai giá trị có thể. Giả sử ta khởi đầu với một giá chứng khoán ban đầu dương S_0 và có hai số dương d và u với:

$$0 < d < u \tag{2.1}$$

sao cho tại thời điểm kế tiếp, giá chứng khoán sẽ là dS_0 hoặc uS_0. Chúng ta sẽ lấy d và u thỏa mãn $0 < d < 1 < u$ để biểu diễn giá chứng khoán tăng từ S_0 tới uS_0 và giảm từ S_0 xuống dS_0. Thông thường ta lấy $d = \frac{1}{u}$ trong hầu hết các ví dụ trong giáo trình này. Tuy vậy, để chặt chẽ, ta cần giả thiết (2.1) và (2.2) sẽ nói tới sau này.

Dĩ nhiên sự biến động giá chứng khoán trong thực tế phức tạp hơn nhiều so với mô hình định giá tài sản nhị phân. Ta xét mô hình đơn giản này vì ba lý do: Thứ nhất, với mô hình này, khái niệm giá cơ lợi và liên hệ của nó với giá trung hòa rủi ro được soi sáng rõ ràng. Thứ hai, mô hình được sử dụng trong thực tế vì với một số đủ các bước thời gian, nó cho một xấp xỉ tốt cho mô hình với thời gian liên tục. Thứ ba, với mô hình nhị phân chúng ta có thể phát triển lý thuyết kỳ vọng điều kiện và martingale-những lý thuyết trọng yếu của mô hình với thời gian liên tục.

Giả sử rằng giá chứng khoán đi lên, hay đi xuống ở mỗi thời điểm kế tiếp ứng với trường hợp ta tung một đồng xu và thấy xuất hiện mặt ngửa (Head-ký hiệu tắt là H) hoặc mặt sấp (Tail-ký hiệu tắt là T). Ký hiệu giá tại thời điểm 1 bởi $S_1(H) = uS_0$ nếu kết quả của phép thử là ngửa, và bởi $S_1(T) = dS_0$ nếu kết quả là sấp. Sau lần tung thứ hai giá sẽ là:

$$S_2(HH) = uS_1(H) = u^2S_0, \quad S_2(TT) = dS_1(T) = d^2S_0,$$

$$S_2(HT) = dS_1(H) = duS_0, \quad S_2(TH) = uS_1(T) = udS_0.$$

Sau lần tung thứ ba, có 8 khả năng có thể cho đồng xu, nhưng không phải tất cả các giá chứng khoán tương ứng tại thời điểm 3 khác nhau.

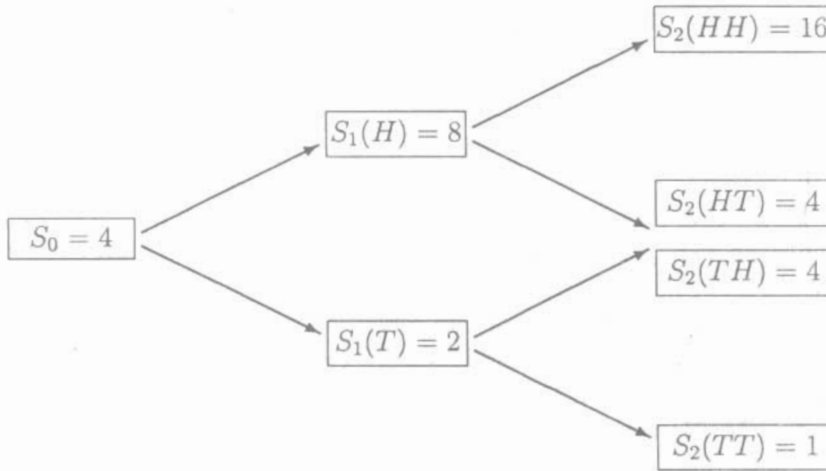
Bây giờ ta giả sử rằng lần tung thứ ba là lần cuối cùng và ký hiệu tập của tất cả các kết cục có thể của lần tung thứ ba bởi:

$$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THT, THH, TTH, TTT\}.$$

Tập Ω tất cả các kết quả có thể của phép thử ngẫu nhiên được gọi là không gian mẫu của phép thử, và biến cố $\omega \in \Omega$ được gọi là các điểm mẫu. Trong trường hợp này mỗi điểm mẫu ω là một dãy có độ dài 3. Ta ký hiệu thành phần thứ k của ω bởi ω_k. Chẳng hạn, khi $\omega = HTH$, ta có $\omega_1 = H, \omega_2 = T, \omega_3 = H$.

Giá chứng khoán S_k tại thời điểm k phụ thuộc vào các phép tung đồng xu. Viết một cách khác ta ký hiệu $S_k(\omega)$. Thực ra, ký hiệu này không nói cho chúng ta toàn bộ sự việc khi mà S_3 phụ thuộc vào mọi ω, S_2 chỉ phụ thuộc vào hai thành phần đầu tiên của ω và S_0 không phụ thuộc vào ω. Đôi khi chúng ta sẽ sử dụng những ký hiệu như $S_2(\omega_1, \omega_2)$ để ghi nhớ chính xác sự phụ thuộc của S_2 vào $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

Ví dụ 2.1.1. Giả sử $S_0 = 4, u = 2, d = \frac{1}{2}$. Khi đó ta có cây nhị phân mô tả giá chứng khoán trong Hình 2.1. Mỗi điểm mẫu $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ biểu diễn một đường của cây. Vì vậy ta có thể coi không gian mẫu Ω như tập của tất cả các



Hình 2.1: Cây nhị phân cho giá chứng khoán với $S_0 = 4, u = 2, d = \frac{1}{2}$.

kết cục có thể từ ba lần tung đồng xu hoặc như tập của tất cả các đường có thể của cây.

Để xây dựng mô hình định giá tài sản nhị phân đầy đủ, ta giới thiệu một thị trường tiền tệ với lãi suất r : Đầu tư 1 USD vào thị trường tiền tệ để trở thành $(1 + r)$ USD trong thời điểm kế tiếp. Ta lấy r là lãi suất cho cả vay và trả (điều này rất tự nhiên vì trong nhiều mô hình ứng dụng, một người môi giới vay hoặc trả (không cả hai) và biết sự tăng giá mà ông ta sẽ làm, trong mỗi ứng dụng, ông ta phải lấy r là tỷ lệ lãi suất cho hoạt động của mình). Chúng ta giả sử rằng

$$d < 1 + r < u. \tag{2.2}$$

Mô hình sẽ không có ý nghĩa nếu ta không có điều kiện này. Chẳng hạn, nếu $1 + r \geq u$ thì lợi suất trên thị trường tiền tệ luôn ít nhất là lớn hơn lợi suất của chứng khoán và không ai muốn đầu tư vào chứng khoán nữa. Bất đẳng thức $d \geq 1 + r$ không thể xảy ra trừ khi r là âm hoặc $d \geq 1$. Trong trường hợp sau, chứng khoán không thực sự đi xuống nếu chúng ta nhận được một mặt sấp, nó đi lên một chút nếu chúng ta nhận được mặt ngửa. Người ta sẽ vay tiền với lãi suất r và đầu tư vào cổ phiếu vì ngay cả trong trường hợp xấu nhất, giá cổ phiếu tăng ít nhất nhanh hơn số nợ được sử dụng để mua nó.

Với cổ phiếu là một tài sản chính, giả sử ta xét một quyền chọn mua kiểu Âu với giá $K > 0$ và thời gian hết hạn 1. Quyền chọn này cho phép mua cổ

phiếu tại thời điểm 1 với K USD và vì thế thu được $S_1 - K$ tại thời điểm 1 nếu $S_1 - K > 0$ và là 0 trong trường hợp còn lại. Ta ký hiệu giá trị của quyền chọn này tại thời điểm đáo hạn là:

$$V_1(\omega) = (S_1(\omega) - K)^+ = \max\{S_1(\omega) - K, 0\}.$$

Dĩ nhiên $V_1(\omega)$ thực ra chỉ phụ thuộc vào ω_1 và đôi khi chúng ta có thể viết $V_1(\omega_1)$ thay cho $V_1(\omega)$. Nhiệm vụ trước tiên của chúng ta là tính toán giá cơ lợi của quyền chọn này tại thời điểm 0.

Giả sử rằng tại thời điểm 0 bạn bán quyền chọn mua với giá V_0 USD, ở đó V_0 đã xác định. Bây giờ bạn có nghĩa vụ trả $(uS_0 - K)^+$ nếu $\omega_1 = H$ và trả $(dS_0 - K)^+$ nếu $\omega_1 = T$. Tại thời điểm bạn bán quyền chọn, bạn chưa biết ω_1 sẽ lấy giá trị nào. Bạn bảo hộ giá trị tạm thời của bạn trong quyền chọn bằng cách mua Δ_0 cổ phiếu chứng khoán, ở đó Δ_0 vẫn chưa xác định. Bạn có thể sử dụng doanh thu V_0 của việc bán quyền chọn cho mục đích này. Nếu V_0 nhiều hơn số cần thiết để mua Δ_0 cổ phiếu chứng khoán, bạn đầu tư tiền còn dư (residual) vào lãi suất r. Trong cả hai trường hợp, bạn sẽ có $V_0 - \Delta_0 S_0$ USD đầu tư trong thị trường tiền tệ, trong đó lượng này có thể âm. Bạn cũng sẽ sở hữu Δ_0 cổ phiếu chứng khoán. Nếu chứng khoán tăng, giá trị danh mục đầu tư của bạn (loại trừ vị thế ngắn hạn trong quyền chọn) là:

$$\Delta_0 S_1(H) + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0),$$

và bạn cần có $V_1(H)$. Do đó, bạn muốn chọn V_0 và Δ_0 để cho

$$V_1(H) = \Delta_0 S_1(H) + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0). \tag{2.3}$$

Nếu chứng khoán giảm, giá trị danh mục đầu tư của bạn là:

$$\Delta_0 S_1(T) + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0),$$

và bạn cần có $V_1(T)$. Do đó, bạn muốn chọn V_0 và Δ_0 để cũng có

$$V_1(T) = \Delta_0 S_1(T) + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0). \tag{2.4}$$

Hai phương trình này là chưa biết và chúng ta giải chúng sau.

Trừ (2.3) cho (2.4), ta thu được:

$$V_1(H) - V_1(T) = \Delta_0(S_1(H) - S_1(T)), \tag{2.5}$$

do đó

$$\Delta_0 = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)}. \tag{2.6}$$

Đây là một phiên bản với thời gian rời rạc của công thức nổi tiếng "delta-hedging" cho chứng khoán phái sinh. Một phòng hộ cần nắm giữ cho mỗi cổ phiếu của tài sản cơ bản là đạo hàm (theo nghĩa tính toán) của giá trị của chứng khoán phái sinh đối với giá của tài sản cơ bản đó. Công thức này bao hàm khi một giao dịch viên (practitioner) nói "delta", ý cô ấy là một đạo hàm (theo nghĩa tính toán) vừa được mô tả. Dầu vậy, để ý rằng định nghĩa của chúng ta về Δ_0 là số của các cổ phiếu chứng khoán người ta nắm giữ tại thời điểm 0, và (2.6) là một hệ quả của định nghĩa này. Không phải Δ_0 tự định nghĩa. Việc này phụ thuộc tất yếu vào mô hình, nó có thể là trường hợp trong mỗi số cổ phiếu chứng khoán một phòng hộ cần nắm giữ không là đạo hàm (tính toán) của chứng khoán phái sinh đối với giá của tài sản ưu đãi.

Để hoàn thành nghiệm của (2.3) và (2.4), chúng ta thay thế (2.6) vào (2.3) hoặc (2.4) và giải với V_0. Sau một vài tính toán đơn giản, ta được công thức:

$$V_0 = \frac{1}{1+r}\left[\frac{1+r-d}{u-d}V_1(H) + \frac{u-(1+r)}{u-d}V_1(T)\right]. \tag{2.7}$$

Đây là giá cơ lợi của quyền chọn mua kiểu Âu với thu hoạch V_1 tại thời điểm 1. Để đơn giản công thức này, ta định nghĩa:

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d},\ \tilde{q} = \frac{u-(1+r)}{u-d} = 1-\tilde{p}, \tag{2.8}$$

khi đó (2.7) trở thành:

$$V_0 = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}V_1(H) + \tilde{q}V_1(T)\right]. \tag{2.9}$$

Vì chúng ta lấy $d < u$, cả $\tilde{p}$ và $\tilde{q}$ được xác định, tức là mẫu số trong (2.8) khác không. Do điều kiện (2.2) cả $\tilde{p}$ và $\tilde{q}$ thuộc khoảng $(0;1)$, và vì tổng của chúng bằng 1, chúng ta có thể coi chúng như xác suất của H và T tương ứng. Chúng là các xác suất trung hòa rủi ro. Chúng xuất hiện khi chúng ta giải hai phương trình (2.3) và (2.4), và không có việc gì để làm với các xác suất xuất hiện H và T của phép tung đồng xu. Thực ra, về điểm này, chúng không có gì hơn một công cụ thích hợp để viết các công thức (2.7) và (2.9).

Bây giờ chúng ta xét một quyền chọn mua kiểu Âu mà trả K USD tại thời điểm 2. Tại thời điểm đáo hạn, thu hoạch cho quyền chọn này là $V_2 = (S_2 - K)^+$, ở đó V_2 và S_2 phụ thuộc vào ω_1 và ω_2, lần tung đồng xu thứ nhất và thứ hai. Chúng ta muốn xác định giá cơ lợi cho quyền chọn này tại thời điểm không. Giả sử một nhà đầu tư bán quyền chọn tại thời điểm không với K USD, ở đó

V_0 vẫn được xác định. Sau đó ông ta mua Δ_0 cổ phiếu chứng khoán, đầu tư $V_0 - \Delta_0 S_0$ USD trong thị trường tiền tệ để kinh doanh. Tại thời điểm 1, nhà đầu tư có một giá trị danh mục đầu tư (loại trừ vị thế ngắn hạn trong quyền chọn) là:

$$X_1 = \Delta_0 S_1 + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0). \tag{2.10}$$

Mặc dù chúng ta không biểu thị nó qua ký hiệu, S_1 và X_1 cần phải phụ thuộc vào kết quả của lần tung thứ nhất ω_1. Vì thế, có hai phương trình ẩn trong (2.10):

$$X_1(H) = \Delta_0 S_1(H) + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0),$$
$$X_1(T) = \Delta_0 S_1(T) + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0).$$

Sau lần tung thứ nhất, nhà đầu tư có X_1 USD và có thể điều chỉnh lại (readjust) sự phòng hộ của ông ta. Giả sử cô ấy quyết định bây giờ giữ Δ_1 cổ phiếu chứng khoán, ở đó Δ_1 được phép phụ thuộc vào ω_1 vì nhà đầu tư biết những giá trị nào ω_1 đã lấy. Ông ta đầu tư phần tài sản còn lại (remainder) $X_1 - \Delta_1 S_1$ vào thị trường tiền tệ. Trong thời điểm kế tiếp, tài sản của cô ấy sẽ được cho bởi vế phải của phương trình sau, và ông ta muốn nó là V_2. Vì thế cho nên ông ta muốn có:

$$V_2 = \Delta_1 S_2 + (1+r)(X_1 - \Delta_1 S_1). \tag{2.11}$$

Mặc dù chúng ta không biểu thị trong ký hiệu, S_2 và V_2 cần phải phụ thuộc vào kết quả của hai lần tung đồng xu đầu tiên ω_1 và ω_2. Xét tất cả bốn khả năng có thể, chúng ta có thể viết (2.11) như bốn phương trình:

$$V_2(HH) = \Delta_1(H)S_2(HH) + (1+r)(X_1(H) - \Delta_1(H)S_1(H)),$$
$$V_2(HT) = \Delta_1(H)S_2(HT) + (1+r)(X_1(H) - \Delta_1(H)S_1(H)),$$
$$V_2(TH) = \Delta_1(T)S_2(TH) + (1+r)(X_1(T) - \Delta_1(T)S_1(T)),$$
$$V_2(TT) = \Delta_1(T)S_2(TT) + (1+r)(X_1(T) - \Delta_1(T)S_1(T)).$$

Bây giờ chúng ta có sáu phương trình, hai phương trình biểu diễn bởi (2.10) và bốn phương trình biểu diễn bởi (2.11), trong sáu phương trình $V_0, \Delta_0, \Delta_1(H)$, $\Delta_1(T), X_1(H)$ và $X_1(T)$ chưa biết.

Để giải các phương trình này, và do đó xác định giá cơ lợi V_0 tại thời điểm 0 của quyền chọn và phòng hộ danh mục đầu tư $V_0, \Delta_1(H)$, và $\Delta_1(T)$, chúng ta bắt đầu với hai phương trình cuối:

$$V_2(TH) = \Delta_1(T)S_2(TH) + (1+r)(X_1(T) - \Delta_1(T)S_1(T)),$$

$$V_2(TT) = \Delta_1(T)S_2(TT) + (1+r)(X_1(T) - \Delta_1(T)S_1(T)).$$

Trừ một trong chúng từ phương trình khác và giải với Δ_1, chúng ta thu được công thức "delta-hedging":

$$\Delta_1(T) = \frac{V_2(TH) - V_2(TT)}{S_2(TH) - S_2(TT)}, \tag{2.12}$$

và trừ phương trình này vào các phương trình khác, ta có thể giải với

$$X_1(T) = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_2(TH) + \tilde{q}V_2(TT)]. \tag{2.13}$$

Phương trình (2.13) cho giá trị phòng hộ danh mục đầu tư cần phải có thời hạn 1 nếu chứng khoán giảm giữa 0 và 1. Ta định nghĩa đẳng thức này là "giá trị cơ lợi của quyền chọn tại thời điểm 1 nếu $\omega_1 = T$," và ký hiệu bởi $V_1(T)$. Chúng ta vừa chỉ ra rằng:

$$V_1(T) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}V_2(TH) + \tilde{q}V_2(TT)\right]. \tag{2.14}$$

Phòng hộ danh mục đầu tư của ông ta cần chọn sao cho tài sản $X_1(T)$ của ông ta (nếu $\omega_1 = T$) [illegible]g với $V_1(T)$ xác định bởi (2.14). Công thức này tương tự công thức (2.9). Bằng phương pháp tương tự, hai phương trình ẩn đầu tiên (implicit) trong (2.11) dẫn đến công thức:

$$\Delta_1(H) = \frac{V_2(HH) - V_2(HT)}{S_2(HH) - S_2(HT)}, \tag{2.15}$$

và $X_1(H) = V_1(H)$, ở đó $V_1(H)$ là giá trị của quyền chọn tại thời điểm 1 nếu $\omega_1 = H$, xác định bởi:

$$V_1(H) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}V_2(HH) + \tilde{q}V_2(HT)\right]. \tag{2.16}$$

Công thức này cũng tương tự công thức (2.9). Cuối cùng, ta thế các giá trị $X_1(H) = V_1(H)$ và $X_1(T) = V_1(T)$ vào hai phương trình ẩn trong (2.10). Nghiệm của các phương trình này với Δ_0 và V_0 là giống như nghiệm của (2.3) và (2.4) và kết quả lại là (2.6) và (2.9).

Mô hình trên vẫn còn nhược điểm là số thời điểm được xét còn hạn chế. Một cách tổng quát, nếu ký hiệu V_k là giá trị tại thời điểm k của chứng khoán phái sinh, và giá trị này phụ thuộc vào k lần tung đồng xu đầu tiên $\omega_1, \ldots, \omega_k$, thì tại thời điểm $k-1$, sau $k-1$ lần tung, $\omega_1, \ldots, \omega_{k-1}$ đã được biết, danh

mục đầu tư để phòng hộ một vị trí ngắn hạn cần nắm giữ $\Delta_{k-1}(\omega_1, ..., \omega_{k-1})$ cổ phiếu chứng khoán, trong đó

$$\Delta_{k-1}(\omega_1, ..., \omega_{k-1}) = \frac{V_k(\omega_1, ..., \omega_{k-1}, H) - V_k(\omega_1, ..., \omega_{k-1}, T)}{S_k(\omega_1, ..., \omega_{k-1}, H) - S_k(\omega_1, ..., \omega_{k-1}, T)}, \quad (2.17)$$

và giá trị tại thời điểm $k-1$ của chứng khoán phái sinh, khi $k-1$ lần tung đầu tiên cho kết quả $\omega_1, ..., \omega_{k-1}$ được xác định bởi:

$$V_{k-1}(\omega_1, ..., \omega_{k-1}) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}V_k(\omega_1, ..., \omega_{k-1}, H) + \tilde{q}V_k(\omega_1, ..., \omega_{k-1}, T)\right]. \quad (2.18)$$

2.2 Kỳ vọng điều kiện

2.2.1 Thông tin

Xét không gian xác suất trong mô hình nhị phân ở mục 2.1 với n thời kỳ. Ở đây chúng ta không để ý đến xác suất xuất hiện mặt ngửa. Giá chứng khoán ban đầu được ký hiệu là S_0. Tại mỗi thời điểm:
- Giá chứng khoán tăng với hệ số u nếu đồng xu xuất hiện mặt ngửa (H);
- Giá chứng khoán giảm với hệ số d nếu đồng xu xuất hiện mặt sấp (T).

Một dãy ký tự của Ω sẽ được ký hiệu là $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$. Ta ký hiệu $S_k(\omega)$ là giá chứng khoán tại thời điểm k (tức là sau k lần tung $1 \leq k \leq n$) ứng với kết cục ω. Nhận thấy rằng $S_k(\omega)$ chỉ phụ thuộc vào $\omega_1, \omega_2, ...\omega_k$; mỗi S_k là một biến ngẫu nhiên xác định trên tập Ω. Chính xác hơn nữa, giả sử $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ là họ tất cả các tập con của Ω, khi đó $\mathcal{F}$ là một σ-đại số và $(\Omega, \mathcal{F})$ là một không gian đo được. Mỗi S_k là một hàm $\mathcal{F}$-đo được từ $\Omega \to \mathbb{R}$, tức là S_k^{-1} là một hàm $\mathcal{B} \to \mathcal{F}$ ở đó $\mathcal{B}$ là một σ-đại số trên $\mathbb{R}$.

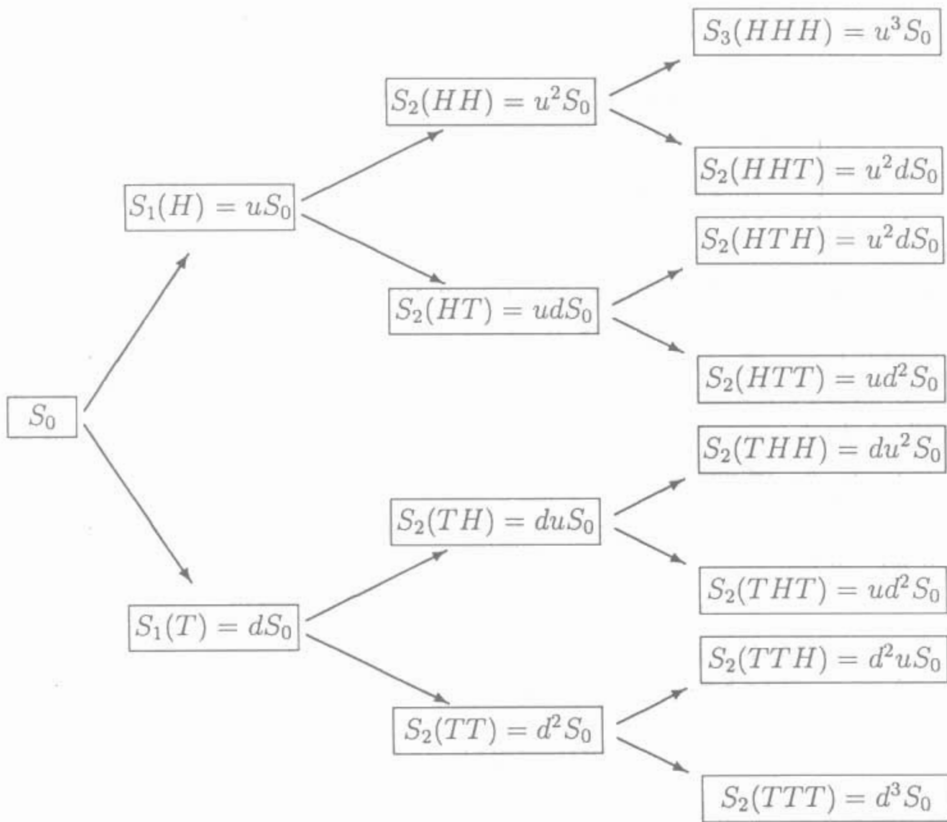
Ví dụ 2.2.1. Xét mô hình nhị phân với ba thời kỳ (xem hình 2.2). Họ tất cả các kết cục có thể thu được là:

$$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}.$$

Vì thế, ta có thể viết:

$$S_1(\omega) = S_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = S_1(\omega_1),$$

$$S_2(\omega) = S_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = S_1(\omega_1, \omega_2).$$



Hình 2.2: Mô hình cây nhị phân cho giá chứng khoán với ba thời kỳ.

Định nghĩa 2.2.1. *Ta nói rằng một tập $A \subset \Omega$ là xác định bởi lần tung đồng xu thứ k nếu chỉ biết kết quả của k lần tung đầu tiên ta có thể quyết định có hay không các kết cục của tất cả các lần tung trong A. Trong trường hợp tổng quát, chúng ta ký hiệu họ của các tập xác định bởi lần tung thứ k bởi $\mathcal{F}_k$. Dễ dàng kiểm tra được $\mathcal{F}_k$ là một σ-đại số.*

Dễ dàng nhận thấy rằng các biến ngẫu nhiên S_k là $\mathcal{F}_k$-đo được, với mỗi $k = 1, 2, ..., n$.

Ví dụ 2.2.2. Trong ví dụ 2.2.1, họ $\mathcal{F}_1$ các tập xác định bởi lần tung đồng xu thứ nhất bao gồm:

1. $A_H = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$, $A_T = \{THH, THT, TTH, TTT\}$,
2. $\emptyset$, và Ω.

Họ $\mathcal{F}_2$ các tập xác định bởi hai lần tung đồng xu đầu tiên bao gồm:
1. $A_{HH} = \{HHH, HHT\}, A_{HT} = \{HTH, HTT\}$,
$A_{TH} = \{THH, THT\}, A_{TT} = \{TTH, TTT\}$,
2. Phần bù của các tập ở trên,
3. Hợp tuỳ ý của các tập ở trên (bao gồm cả các phần bù),
4. $\emptyset$ và Ω.

Định nghĩa 2.2.2. (Thông tin mang bởi một biến ngẫu nhiên). *Giả sử X là một biến ngẫu nhiên: $\Omega \to \mathbb{R}$. Ta nói rằng một tập $A \subset \Omega$ được xác định bởi biến ngẫu nhiên X nếu chỉ cần biết giá trị $X(\omega)$ của biến ngẫu nhiên ta có thể khẳng định $\omega \in A$ hay $\omega \notin A$. Nói cách khác, với mọi $y \in \mathbb{R}$, hoặc $X^{-1}(y) \subset A$ hoặc $X^{-1}(y) \cap A = \emptyset$. Họ các tập con của Ω xác định bởi X là một σ-đại số, và gọi là σ-đại số sinh bởi X, ký hiệu là $\sigma(X)$.*

Nếu biến ngẫu nhiên X lấy hữu hạn giá trị khác nhau, thì $\sigma(X)$ được sinh bởi họ các tập:

$$\{X^{-1}(X(\omega)) | \omega \in \Omega\};$$

các tập này được gọi là nguyên tử của σ-đại số $\sigma(X)$.

Trong trường hợp tổng quát, nếu X là biến ngẫu nhiên $\Omega \to \mathbb{R}$, thì $\sigma(X)$ cho bởi:

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}\}.$$

Ví dụ 2.2.3. (Các tập xác định bởi S_2). σ-đại số sinh bởi S_2 trong ví dụ 2.2.1 chứa các tập sau:
1. $A_{HH} = \{HHH, HHT\} = \{S_2(\omega) = u^2 S_0\}$,
$A_{TT} = \{TTH, TTT\} = \{S_2 = d^2 S_0\}$, $A_{HT} \cap A_{TH} = \{S_2 = udS_0\}$,
2. Phần bù của các tập ở trên,
3. Hợp tuỳ ý của các tập ở trên (bao gồm cả các phần bù),
4. $\emptyset = \{S_2(\omega) \in \emptyset\}$ và $\Omega = \{S_2(\omega) \in \mathbb{R}\}$.

2.2.2 Định nghĩa kỳ vọng điều kiện

Xét không gian xác suất của phép thử gieo ba đồng xu trong các ví dụ trước. Gọi S_i là biến ngẫu nhiên chỉ giá trị của cổ phiếu tại thời điểm $i, (i = 1, 2)$. Ký hiệu ước lượng của S_1 và S_2 là $\mathbb{E}(S_1|S_2)$. Khi đó $\mathbb{E}(S_1|S_2)$ là một biến ngẫu nhiên Y mà giá trị tại ω được xác định bởi:

$$Y(\omega) = \mathbb{E}(S_1 | S_2 = y),$$

ở đó $y = S_2(\omega)$.

Các tính chất của $\mathbb{E}(S_1|S_2)$:

- $\mathbb{E}(S_1|S_2)$ cần phụ thuộc vào ω, tức là một biến ngẫu nhiên.

- Nếu đã biết giá trị của S_2, thì giá trị của $\mathbb{E}(S_1|S_2)$ cũng cần được biết. Đặc biệt:

  - Nếu $\omega = HHH$ hoặc $\omega = HHT$, thì $S_2(\omega) = u^2S_0$. Nếu ta biết rằng $S_2(\omega) = u^2S_0$, thì ngay cả khi không biết ω, ta biết $S_1(\omega) = uS_0$. Ta định nghĩa:

$$\mathbb{E}(S_1|S_2)(HHH) = \mathbb{E}(S_1|S_2)(HHT) = uS_0.$$

  - Nếu $\omega = TTT$ hoặc $\omega = TTH$, thì $S_2(\omega) = d^2S_0$. Nếu ta biết rằng $S_2(\omega) = d^2S_0$, thì ngay cả khi không biết ω, ta biết $S_1(\omega) = dS_0$. Ta định nghĩa:

$$\mathbb{E}(S_1|S_2)(TTT) = \mathbb{E}(S_1|S_2)(TTH) = uS_0.$$

  - Nếu $\omega \in A = \{HTH, HTT, THH, THT\}$, thì $S_2(\omega) = udS_0$. Nếu ta biết $S_2(\omega) = udS_0$, thì ta không biết $S_1(\omega) = uS_0$ hay $S_1(\omega) = dS_0$. Ta lấy trung bình:

$$\mathbb{P}(A) = p^2q + pq^2 + p^2q + pq^2 = 2pq.$$

  Hơn nữa,

$$\begin{aligned}\int_A S_1 d\mathbb{P} &= p^2quS_0 + pq^2uS_0 + p^2qdS_0 + pq^2dS_0\\ &= pq(u+d)S_0.\end{aligned}$$

  Với $\omega \in A$ ta định nghĩa:

$$\mathbb{E}(S_1|S_2)(\omega) = \frac{\int_A S_1 d\mathbb{P}}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1}{2}(u+d)S_0.$$

  Khi đó:

$$\int_A \mathbb{E}(S_1|S_2)d\mathbb{P} = \int_A S_1 d\mathbb{P}.$$

Vậy ta có thể viết

$$\mathbb{E}(S_1|S_2)(\omega) = g(S_2(\omega)),$$

ở đó:

$$g(x) = \begin{cases} uS_0 & \text{nếu } x = u^2 S_0 \\ \frac{1}{2}(u+d)S_0 & \text{nếu } x = udS_0 \\ dS_0 & \text{nếu } x = d^2 S_0 \end{cases}$$

Nói cách khác, $\mathbb{E}(S_1|S_2)$ là biến ngẫu nhiên chỉ phụ thuộc vào S_2. Ta cũng viết

$$\mathbb{E}(S_1|S_2 = x) = g(x),$$

ở đó g là hàm xác định như ở trên.

Ta nhận thấy biến ngẫu nhiên $\mathbb{E}(S_1|S_2)$ có hai tính chất cơ bản:

- $\mathbb{E}(S_1|S_2)$ là $\sigma(S_2)$-đo được.
- Với mọi tập $A \in \sigma(S_2)$,

$$\int_A \mathbb{E}(S_1|S_2) d\mathbb{P} = \int_A S_1 d\mathbb{P}.$$

Một cách tổng quát ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 2.2.3. *Giả sử $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ là một không gian xác suất, và $\mathcal{G}$ là một σ-đại số con của $\mathcal{F}$. Giả sử X là một biến ngẫu nhiên trên $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Khi đó $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ được xác định là một biến ngẫu nhiên Y thoả mãn:*

a, *Y là $\mathcal{G}$-đo được,*

b, *Với mọi $A \in \mathcal{G}$ ta có:*

$$\int_A Y d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}.$$

Kỳ vọng điều kiện $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ luôn tồn tại và duy nhất, thật vậy:

Sự tồn tại. Luôn luôn có một biến ngẫu nhiên Y thoả mãn các tính chất trên (miễn là $\mathbb{E}|X| < \infty$).

Sự duy nhất. Có thể có nhiều hơn một biến ngẫu nhiên Y thoả mãn các tính chất trên, nhưng nếu Y' là một biến ngẫu nhiên như vậy thì $Y' = Y$ hầu chắc chắn, tức là, $\mathbb{P}\{\omega \in \Omega; Y(\omega) = Y'(\omega)\} = 1$.

Chú thích 2.2.1. *Với các biến ngẫu nhiên X, Y ta viết:*

$$\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X|\sigma(Y)).$$

Điều kiện (b,) trong định nghĩa trên còn gọi là "tính chất trung bình riêng", tính chất này có thể viết như sau:

$$\int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G})d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}, \quad \forall A \in \mathcal{G}.$$

hay

$$\mathbb{E}[\mathbb{I}_A.\mathbb{E}(X|\mathcal{G})] = \mathbb{E}[\mathbb{I}_A.X].$$

Chú ý rằng $\mathbb{I}_A$ là hàm chỉ tiêu của biến cố A, tức là:

$$\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \omega \in A, \\ 0 & \text{nếu } \omega \notin A; \end{cases}$$

do đó $\mathbb{I}_A$ là một biến ngẫu nhiên $\mathcal{G}$-đo được. Từ đó ta có bổ đề sau đây:

Bổ đề 2.2.1. *Nếu V là biến ngẫu nhiên $\mathcal{G}$-đo được bất kỳ, thì*

$$\mathbb{E}[V.\mathbb{E}(X|\mathcal{G})] < \infty \quad \textit{và} \quad \mathbb{E}[V.\mathbb{E}(X|\mathcal{G})] = \mathbb{E}[V.X].$$

Trên cơ sở bổ đề này, ta có thể thay thế điều kiện thứ hai trong định nghĩa trên bởi:

b', Với mọi biến ngẫu nhiên $\mathcal{G}$-đo được V, ta có:

$$\mathbb{E}[V.\mathbb{E}(X|\mathcal{G})] = \mathbb{E}[V.X].$$

2.2.3 Các tính chất của kỳ vọng điều kiện

Từ định nghĩa của kỳ vọng điều kiện ta dễ dàng suy ra các tính chất sau:

(a) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) = \mathbb{E}(X)$. Suy ra từ tính chất (b,) trong Định nghĩa 2.2.3.

(b) Nếu X là $\mathcal{G}$-đo được thì

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = X.$$

Thật vậy, nếu thông tin chứa trong $\mathcal{G}$ là đủ để xác định X thì ước lượng tốt nhất của X trên cơ sở $\mathcal{G}$ là X.

(c) (Tuyến tính)

$$\mathbb{E}(a_1X_1 + a_2X_2|\mathcal{G}) = a_1\mathbb{E}(X_1|\mathcal{G}) + a_2\mathbb{E}(X_2|\mathcal{G}).$$

(d) (Không âm) Nếu $X \geq 0$ hầu chắc chắn thì

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \geq 0.$$

Thật vậy, lấy $A = \{\omega \in \Omega : \mathbb{E}(X|\mathcal{G})(\omega) < 0\}$. Tập này thuộc $\mathcal{G}$ vì nó là $\mathcal{G}$-đo được. Ta có

$$\int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G})d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}.$$

Vế phải của đẳng thức trên không âm và vế trái âm trừ khi $\mathbb{P}(A) = 0$. Vì thế cho nên $\mathbb{P}(A) = 0$.

(e) (Bất đẳng thức Jensen) Nếu $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm lồi và $\mathbb{E}|\varphi(X)| < +\infty$, thì

$$\mathbb{E}(\phi(X)|\mathcal{G}) \geq \phi(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})).$$

Nhắc lại bất đẳng thức Jensen thông thường: $\mathbb{E}(\phi(X)) \geq \varphi(\mathbb{E}(X))$.

(f) (Tính chất tháp) Nếu $\mathcal{H}$ là một σ-đại số con của $\mathcal{G}$, thì

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{H}).$$

Thật vậy, $\mathcal{H}$ là σ-đại số con của $\mathcal{G}$ có nghĩa rằng $\mathcal{G}$ chứa nhiều thông tin hơn $\mathcal{H}$. Nếu chúng ta ước lượng X trên cơ sở thông tin của $\mathcal{G}$, và sau đó ước lượng trên cơ sở một lượng thông tin nhỏ hơn là $\mathcal{H}$, thì ta nhận được cùng một kết quả như nếu ta ước lượng trực tiếp X trên cơ sở thông tin của $\mathcal{H}$.

(g) (Lấy ra ngoài những gì đã biết) Nếu Z là $\mathcal{G}$-đo được, thì

$$\mathbb{E}(Z.X|\mathcal{G}) - Z.\mathbb{E}(X|\mathcal{G}).$$

Khi lấy điều kiện trên $\mathcal{G}$, một biến ngẫu nhiên $\mathcal{G}$-đo được Z giống như một hằng số.

Thật vậy, giả sử Z là $\mathcal{G}$-đo được. Một biến ngẫu nhiên Y là $\mathbb{E}(ZX|\mathcal{G})$ nếu và chỉ nếu

(i) Y là $\mathcal{G}$-đo được.

(ii) $\int_A Y d\mathbb{P} = \int_A ZXd\mathbb{P}, \quad \forall A \in \mathcal{G}$.

Lấy $Y = Z.\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$, khi đó Y thoả mãn (ii) (tích của các biến ngẫu nhiên $\mathcal{G}$-đo được là biến ngẫu nhiên $\mathcal{G}$-đo được). Y cũng thoả mãn tính chất (ii), vì:

$$\begin{aligned}\int_A Y d\mathbb{P} &= \mathbb{E}(\mathbb{I}_A.Y)\\ &= \mathbb{E}[\mathbb{I}_A.Z.\mathbb{E}(X|\mathcal{G})]\\ &= \mathbb{E}[\mathbb{I}_A.Z.X] \text{ tính chất (b') với } V = \mathbb{I}_A.Z\\ &= \int_A ZXd\mathbb{P}.\end{aligned}$$

(h) (Vai trò của sự độc lập) Nếu $\mathcal{H}$ độc lập với $\sigma(\sigma(X),\mathcal{G})$, thì:

$$\mathbb{E}(X|\sigma(\mathcal{G},\mathcal{H})) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}).$$

Trong trường hợp đặc biệt, nếu X độc lập với $\mathcal{H}$, thì:

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(X).$$

Nếu $\mathcal{H}$ độc lập với X và $\mathcal{G}$, thì không thu được gì hơn khi ta biết thêm thông tin của $\mathcal{H}$ trong ước lượng X.

Thật vậy, để đơn giản ta chứng minh đẳng thức thứ hai. Trước tiên ta nhận thấy rằng $\mathbb{E}X$ là $\mathcal{H}$-đo được vì nó là hằng số. Ta cần kiểm tra "tính chất trung bình riêng"

$$\int_A \mathbb{E}X d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P} \text{ với mọi } A \in \mathcal{H}.$$

Nếu X là một hàm chỉ tiêu của tập B nào đó mà độc lập với $\mathcal{H}$, thì "tính chất trung bình riêng" cần phải kiểm tra trở thành:

$$\int_A \mathbb{P}(B)d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{I}_B d\mathbb{P}.$$

Vế trái của đẳng thức này là $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, và vế phải là:

$$\int_\Omega \mathbb{I}_A\mathbb{I}_B d\mathbb{P} = \int_\Omega \mathbb{I}_{A\cap B} d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A\cap B).$$

Do A và B độc lập nên $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A\cap B)$ và ta thu được đẳng thức trung bình riêng ở trên. Với biến ngẫu nhiên X tổng quát, độc lập với $\mathcal{H}$, đẳng thức này được suy ra tương tự.

2.2.4 Các ví dụ từ mô hình nhị phân

Xét mô hình nhị phân trong các mục trước và σ-đại số $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, A_H, A_T, \Omega\}$. Nhận thấy rằng $\mathbb{E}(S_2|\mathcal{F}_1)$ phải là hằng số trên A_H và A_T. Bây giờ vì $\mathbb{E}(S_2|\mathcal{F}_1)$ cần phải thoả mãn tính chất:

$$\int_{A_H} \mathbb{E}(S_2|\mathcal{F}_1) d\mathbb{P} = \int_{A_H} S_2 d\mathbb{P},$$

$$\int_{A_T} \mathbb{E}(S_2|\mathcal{F}_1) d\mathbb{P} = \int_{A_T} S_2 d\mathbb{P}.$$

Ta tính

$$\begin{aligned}\int_{A_H} \mathbb{E}(S_2|\mathcal{F}_1) d\mathbb{P} &= \mathbb{P}(A_H)\mathbb{E}(S_2|\mathcal{F}_1)(\omega) \\ &= p\mathbb{E}(S_2|\mathcal{F}_1)(\omega), \quad \forall \omega \in A_H.\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\int_{A_H} S_2 d\mathbb{P} = p^2 u^2 S_0 + pqudS_0.$$

Vì thế cho nên

$$\mathbb{E}(S_2|\mathcal{F}_1)(\omega) = pu^2 S_0 + qudS_0, \quad \forall \omega \in A_H.$$

Ta cũng có thể viết

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_2|\mathcal{F}_1)(\omega) &= pu^2 S_0 + qudS_0 \\ &= (pu + qd)uS_0 \\ &= (pu + qd)S_1(\omega), \ \forall \omega \in A_H.\end{aligned}$$

Tương tự

$$\mathbb{E}(S_2|\mathcal{F}_1)(\omega) = (pu + qd)S_1(\omega), \ \forall \omega \in A_T.$$

Vì vậy, trong cả hai trường hợp ta có:

$$\mathbb{E}(S_2|\mathcal{F}_1)(\omega) = (pu + qd)S_1(\omega), \ \forall \omega \in \Omega.$$

2.2.5 Mactingale với thời gian rời rạc

Giả sử $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ là một không gian xác suất.

Định nghĩa 2.2.4. *Một dãy các σ-đại số $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ sao cho mỗi σ-đại số trong dãy chứa tất cả các tập thuộc các σ-đại số trước, tức là:*

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$$

được gọi là một bộ lọc hay lịch sử.

Định nghĩa 2.2.5. *Một dãy các biến ngẫu nhiên $M_0, M_1, \ldots, M_n$ được gọi là một quá trình ngẫu nhiên với thời gian rời rạc (hay quá trình ngẫu nhiên rời rạc).*

Định nghĩa 2.2.6. *Một quá trình ngẫu nhiên được gọi là một martingale (với thời gian rời rạc) nếu:*

1. *Mỗi M_k là $\mathcal{F}_k$-đo được. Nếu ta biết thông tin trong $\mathcal{F}_k$, thì ta biết giá trị của M_k. Ta nói rằng quá trình M_k là thích nghi với lọc $\{\mathcal{F}_k\}$.*

2. *Với mỗi k, $\mathbb{E}(M_{k+1}|\mathcal{F}_k) = M_k$. Martingale dần tới cân bằng, không tăng hoặc giảm (trò chơi công bằng dần theo thời gian).*

Nếu điều kiện thứ hai ở trên được thay thế bởi: $\mathbb{E}(M_{k+1}|\mathcal{F}_k) \leq M_k$ ta có một martingale trên (supermartingale).
Nếu điều kiện thứ hai ở trên được thay thế bởi: $\mathbb{E}(M_{k+1}|\mathcal{F}_k) \geq M_k$ ta có một martingale dưới (submartingale).

Ví dụ 2.2.4. Trong mô hình nhị phân ở các mục trước, với $k = 1, 2$ ta có:

$$\mathbb{E}(S_{k+1}|\mathcal{F}_k) = (pu + qd)S_k.$$

Với $k = 0$, ta đặt $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ và gọi là "σ-đại số tầm thường". σ-đại số này không chứa thông tin nào, và bất kỳ biến ngẫu nhiên nào $\mathcal{F}_0$-đo được đều là hằng số (không ngẫu nhiên). Vì thế cho nên, theo định nghĩa $\mathbb{E}(S_1|\mathcal{F}_0)$ là hằng số mà thoả mãn tính chất:

$$\int_\Omega \mathbb{E}(S_1|\mathcal{F}_0)d\mathbb{P} = \int_\Omega S_1 d\mathbb{P}.$$

Vế phải của đẳng thức trên là $\mathbb{E}S_1 = (pu + qd)S_0$, vì vậy ta có:

$$\mathbb{E}(S_1|\mathcal{F}_0) = (pu + qd)S_0.$$

Do đó:

- Nếu $(pu + qd) = 1$ thì $\{S_k, \mathcal{F}_k; k = 0, 1, 2, 3\}$ là một martingale.
- Nếu $(pu + qd) \geq 1$ thì $\{S_k, \mathcal{F}_k; k = 0, 1, 2, 3\}$ là một martingale dưới.
- Nếu $(pu + qd) \leq 1$ thì $\{S_k, \mathcal{F}_k; k = 0, 1, 2, 3\}$ là một martingale trên.

2.3 Định giá Arbitrage

2.3.1 Định giá trong mô hình nhị phân

Ví dụ 2.3.1. (Định giá một quyền chọn mua). Xét mô hình nhị phân trong mục 2.1. Giả sử $u = 2, d = 0.5, r = 25\%, S_0 = 50$. Ta luôn giả sử trong ví dụ này và các ví dụ sau rằng tỷ lệ lãi suất và giá chứng khoán $S_0, S_1, \ldots$ được đánh số bởi cùng một đơn vị thời gian. Ta đã biết rằng:

$$S_1(\omega) = \begin{cases} 100 & \text{nếu } \omega_1 = H \\ 25 & \text{nếu } \omega_1 = T \end{cases}$$

Bài toán đặt ra là: Tìm giá trị tại thời điểm 0 của một quyền chọn mua một cổ phiếu tại thời điểm 1 với 50 USD (tức là giá thực hiện là 50 USD).

Giá trị của quyền chọn mua tại thời điểm 1 là:

$$V_1(\omega) = (S_1(\omega) - 50)^+ = \begin{cases} 50 & \text{nếu } \omega_1 = H \\ 0 & \text{nếu } \omega_1 = T \end{cases}$$

Giả sử giá quyền chọn tại thời điểm 0 là 20 USD. Ta cấu trúc một danh mục đầu tư như sau:

1. Bán 3 quyền chọn với giá 20 USD một quyền chọn. Tiền chi phí là -60 USD.
2. Mua 2 cổ phiếu với giá 50 USD một cổ phiếu. Tiền chi phí là 100 USD.
3. Vay 40 USD. Tiền chi phí là -40 USD.

Danh mục đầu tư này không yêu cầu đầu tư ban đầu. Với danh mục đầu tư này, lượng tiền chi phí tại thời điểm 1 (đơn vị USD) là:

	$\omega_1 = H$	$\omega_1 = T$
Trả cho quyền chọn	150	0
Bán cổ phiếu	-200	-50
Trả nợ	50	50
Tổng	0	0

Giá trị của quyền chọn tại thời điểm 0 là $V_0 = 20$.

Ví dụ trên cho ta một hình ảnh về lý thuyết định giá cơ lợi (arbitrage pricing theory - APT). Các giả thiết của APT là:

- Không giới hạn việc bán khống các cổ phiếu.
- Không giới hạn sự cho vay.
- Không có chi phí giao dịch.
- Mỗi tác nhân là một người đầu tư nhỏ, tức là, việc buôn bán của cá nhân ông ta không làm thay đổi thị trường.

Nhận xét: Giá trị APT của quyền chọn không phụ thuộc vào xác suất của H và T.

2.3.2 Một bước APT tổng quát

Giả sử một chứng khoán phái sinh trả một lượng V_1 tại thời điểm 1, ở đó V_1 là một biến ngẫu nhiên $\mathcal{F}_1$-đo được. Ta xây dựng một phương án đầu tư như sau:

- Bán chứng khoán với giá V_0 tại thời điểm 0 (V_0 được xác định sau).
- Mua Δ_0 cổ phiếu tại thời điểm 0 (Δ_0 được xác định sau).
- Đầu tư $V_0 - \Delta_0 S_0$ vào thị trường, với tỷ lệ lãi suất không rủi ro là r ($V_0 - \Delta_0 S_0$ có thể âm).
- Khi đó giá trị tài sản tại thời điểm 1 là:

$$\begin{aligned} X_1 &\triangleq \Delta_0 S_1 + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0) \\ &= (1+r)V_0 + \Delta_0(S_1 - (1+r)S_0). \end{aligned}$$

- Ta muốn chọn V_0 và Δ_0 sao cho:

$$X_1 = V_1$$

  kể cả khi cổ phiếu tăng hoặc giảm.

Điều kiện cuối cùng ở trên có thể biểu diễn bởi hai phương trình:

$$(1+r)V_0 + \Delta_0(S_1(H) - (1+r)S_0) = V_1(H) \quad (2.19)$$
$$(1+r)V_0 + \Delta_0(S_1(T) - (1+r)S_0) = V_1(T) \quad (2.20)$$

Chú ý rằng, ở đây, giá trị V_k của chứng khoán phái sinh là một hàm của S_k. tức là, khi đã biết S_k với một ω đã cho thì V_k cũng được biết tại ω đó (và vì thế cho nên không ngẫu nhiên). Trừ vế với vế hai phương trình ở trên ta được

$$\Delta_0 = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)} \quad (2.21)$$

Thay Δ_0 trong công thức (2.21) vào công thức (2.19) ta có:

$$\begin{aligned}(1+r)V_0 &= V_1(H) - \Delta_0(S_1(H) - (1+r)S_0) \\ &= V_1(H) - \frac{V_1(H) - V_1(T)}{(u-d)S_0}(u-1-r)S_0 \\ &= \frac{1}{u-d}\left[(u-d)V_1(H) - (V_1(H) - V_1(T))(u-1-r)\right] \\ &= \frac{1+r-d}{u-d}V_1(H) + \frac{u-1-r}{u-d}V_1(T).\end{aligned}$$

Ta đã có giả thiết $u > d > 0$. Bây giờ ta giả sử $d \leq 1+r \leq u$ (trong trường hợp khác sẽ có cơ hội cơ lợi) Định nghĩa:

$$\tilde{p} \triangleq \frac{1+r-d}{u-d}, \ \tilde{q} \triangleq \frac{u-1-r}{u-d}$$

Khi đó $\tilde{p} > 0$ và $\tilde{q} > 0$. Vì $p + q = 1$, ta có $0 < \tilde{p} < 1$ và $\tilde{q} = 1 - \tilde{p}$ (vì thế $\tilde{p}, \tilde{q}$ giống như những xác suất). Từ đó giá của quyền chọn mua tại thời điểm 0 được cho bởi:

$$V_0 = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}V_1(H) + \tilde{q}V_1(T)\right]. \quad (2.22)$$

2.3.3 Độ đo xác suất trung hòa rủi ro

Giả sử Ω là tập các kết cục có thể từ n lần tung đồng xu. Ta cấu trúc một độ đo xác suất $\widetilde{\mathbb{P}}$ trên Ω bởi công thức:

$$\widetilde{\mathbb{P}}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \triangleq \tilde{p}^{\#\{j; \omega_j = H\}} \tilde{q}^{\#\{j; \omega_j = T\}}.$$

$\widetilde{\mathbb{P}}$ được gọi là độ đo xác suất trung hòa rủi ro. Ta ký hiệu $\widetilde{\mathbb{E}}$ là kỳ vọng dưới độ đo $\widetilde{\mathbb{P}}$. Phương trình (2.22) cho ta:

$$V_0 = \widetilde{\mathbb{E}}\left(\frac{1}{1-r}V_1\right).$$

Định lý 2.3.1. *Dưới độ đo $\widetilde{\mathbb{P}}$, quá trình giá cổ phiếu đã chiết khấu*

$$\{(1+r)^{-k}S_k, \mathcal{F}_k\}_{k=0}^{n}$$

là một martingale.

Chứng minh. Ta có:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-(k+1)}S_{k+1}|\mathcal{F}_k\right] &= (1+r)^{-(k+1)}(u\tilde{p}+d\tilde{q})S_k \\
&= (1+r)^{-(k+1)}\left(\frac{u(1+r-d)}{u-d}+\frac{d(u-1-r)}{u-d}\right)S_k \\
&= (1+r)^{-(k+1)}\frac{u+ur-ud+du-d-dr}{u-d}S_k \\
&= (1+r)^{-(k+1)}\frac{(u-d)(1+r)}{u-d}S_k \\
&= (1+r)^{-k}S_k.
\end{aligned}$$

Vậy quá trình giá cổ phiếu đã chiết khấu $\{(1+r)^{-k}S_k, \mathcal{F}_k\}_{k=0}^{n}$ là một martingale. □

2.3.4 Quá trình danh mục đầu tư tự điều chỉnh tài chính

Xét một quá trình danh mục đầu tư: $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1})$, trong đó:

- Δ_k là số cổ phiếu người đầu tư giữ trong khoảng thời gian giữa k và $k+1$.
- Mỗi Δ_k là $\mathcal{F}_k$-đo được.

Ta xây dựng một danh mục đầu tư tự điều chỉnh tài chính Δ như sau:

- Bắt đầu với tài sản nguyên thuỷ không ngẫu nhiên $X_0 \neq 0$.

- Định nghĩa hồi quy

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= \Delta_k S_{k+1} + (1+r)(X_k - \Delta_k S_k) \\ &= (1+r)X_k + \Delta_k(S_{k+1} - (1+r)S_k). \end{aligned} \tag{2.23}$$

- Mỗi X_k là $\mathcal{F}_k$-đo được.

Ta có định lý sau:

Định lý 2.3.2. *Dưới độ đo $\widetilde{\mathbb{P}}$, quá trình giá trị danh mục đầu tư tự điều chỉnh tài chính đã chiết khấu $\{(1-r)^{-k}X_k, \mathcal{F}_k\}_{k=0}^n$ là một martingale.*

Chứng minh. Ta có:

$$(1+r)^{-(k+1)} X_{k+1} = (1+r)^{-k} X_k + \Delta_k \left((1+r)^{-(k+1)} S_{k+1} - (1+r)^{-k} S_k \right).$$

Vì thế cho nên

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-(k+1)} X_{k+1} | \mathcal{F}_k\right] &= \tilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-k} X_k | \mathcal{F}_k\right] \\ &\quad + \tilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-(k+1)} \Delta_k S_{k+1} | \mathcal{F}_k\right] \\ &\quad - \tilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-k} \Delta_k S_k | \mathcal{F}_k\right] \\ &= (1+r)^{-k} X_k \quad \text{(do (b) trong định nghĩa)} \\ &\quad + \Delta_k \tilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-(k+1)} S_{k+1} | \mathcal{F}_k\right] \\ &\quad - (1+r)^{-k} \Delta_k S_k \\ &= (1+r)^{-k} X_k \quad \text{(do định lý 2.3.1).} \end{aligned}$$

□

2.3.5 Các chứng khoán phái sinh kiểu Âu đơn giản

Xét mô hình nhị phân với n thời kỳ. Gọi V_k là giá trị của quá trình danh mục đầu tư, S_k là giá chứng khoán tại thời kỳ thứ k và Δ_{k-1} là danh mục đầu tư có phòng hộ trong thời kỳ đó. Ta đã biết với $k = 0, 1, ..., n-1$:

$$\Delta_{k-1}(\omega_1, ..., \omega_{k-1}) = \frac{V_k(\omega_1, ..., \omega_{k-1}, H) - V_k(\omega_1, ..., \omega_{k-1}, T)}{S_k(\omega_1, ..., \omega_{k-1}, H) - S_k(\omega_1, ..., \omega_{k-1}, T)}.$$

Định nghĩa 2.3.1. *Một chứng khoán phái sinh kiểu Âu đơn giản với thời điểm đáo hạn m là một biến ngẫu nhiên $\mathcal{F}_m$-đo được ($m \leq n$).*

Định nghĩa 2.3.2. *Một chứng khoán phái sinh kiểu Âu đơn giản V_m được gọi là có thể phòng hộ nếu tồn tại một hằng số X_0 và một quá trình danh mục đầu tư $\Delta = (\Delta_0, ..., \Delta_{m-1})$ sao cho quá trình giá trị tự điều chỉnh tài chính $X_0, X_1, ..., X_m$ cho bởi (2.23) thoả mãn:*

$$X_m(\omega) = V_m(\omega), \forall\, \omega \in \Omega.$$

Trong trường hợp này, với $k = 0, 1, ..., m$, ta gọi X_k là giá trị APT tại thời điểm k của V_m.

Định lý 2.3.3. *Nếu một chứng khoán phái sinh kiểu Âu đơn giản V_m được phòng hộ, thì với mỗi $k = 0, 1, ..., m$ giá trị APT tại thời điểm k của V_m là:*

$$V_k \triangleq (1+r)^k \tilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-m} V_m | \mathcal{F}_k\right]. \tag{2.24}$$

Chứng minh. Trước tiên ta quan sát rằng nếu $\{M_k, \mathcal{F}_k; k = 0, 1, ..., m\}$ là một martingale, tức là thoả mãn tính chất martingale

$$\tilde{\mathbb{E}}\left[M_{k+1} | \mathcal{F}_k\right] = M_k$$

với mỗi $k = 0, 1, ..., m-1$ thì ta cũng có:

$$\tilde{\mathbb{E}}\left[M_m | \mathcal{F}_k\right] = M_k,\ k = 0, 1, ..., m-1. \tag{2.25}$$

Khi $k = m-1$ thì phương trình (2.25) suy ra trực tiếp từ tính chất martingale. Với $k = m-2$ ta sử dụng tính chất tháp để viết:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}\left[M_m | \mathcal{F}_{m-2}\right] &= \tilde{\mathbb{E}}\left[\tilde{\mathbb{E}}\left[M_m | \mathcal{F}_{m-1}\right] | \mathcal{F}_{m-2}\right] \\ &= \tilde{\mathbb{E}}\left[M_{m-1} | \mathcal{F}_{m-2}\right] \\ &= M_{m-2}. \end{aligned}$$

Ta có thể tiếp tục bằng phương pháp quy nạp để thu được (2.25).

Nếu chứng khoán phái sinh kiểu Âu đơn giản V_m được phòng hộ, thì có một quá trình danh mục đầu tư mà quá trình giá trị tự điều chỉnh tài chính $X_0, X_1, ..., X_m$ thoả mãn $X_m = V_m$. Theo định nghĩa, X_k là giá trị APT tại thời điểm k của V_m. Từ định lý 2.3.2 ta có:

$$X_0, (1+r)^{-1} X_1, ..., (1+r)^{-m} X_m$$

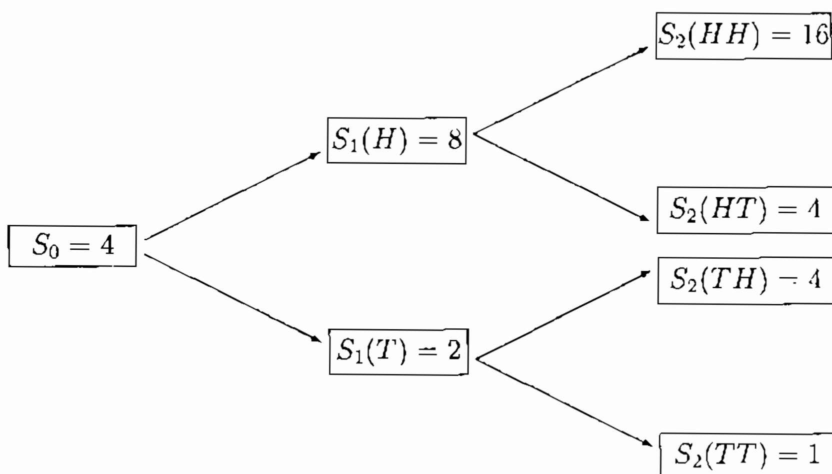
là một martingale, và với mỗi k

$$(1+r)^{-k} X_k = \tilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-m} X_m|\mathcal{F}_k\right] = \tilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-m} V_m|\mathcal{F}_k\right].$$

Vì thế cho nên:

$$X_k = (1+r)^k \tilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-m} V_m|\mathcal{F}_k\right].$$

□



Hình 2.3: Giá chứng khoán Lookback Option.

Ví dụ 2.3.2. (Lookback Option). Cho $u = 2$, $d = 0,5$; $r = 0,25$; $S_0 = 4$; $\tilde{p} = \dfrac{1+r-d}{u-d} = 0,5$; $\tilde{q} = 1 - \tilde{p} = 0,5$. Xét một chứng khoán phái sinh đơn giản kiểu Âu với kỳ hạn 2 (xem hình 2.3), thu hoạch cho bởi:

$$V_2 = \max_{0 \le k \le 2} (S_k - 5)^+.$$

Chú ý rằng:

$$V_2(HH) = 11; V_2(HT) = 3 \neq V_2(TH) = 0; V_2(TT) = 0.$$

Vì thế giá thu hoạch có "quỹ đạo độc lập". Tính ngược theo thời gian, ta có:

$$V_1(H) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}V_2(HH) + \tilde{q}V_2(HT)\right] = \frac{4}{5}[0,5 \times 11 + 0,5 \times 3] = 5,60;$$

$$V_1(T) = \frac{4}{5}[0,5 \times 0 + 0,5 \times 0] = 0;$$

$$V_0 = \frac{4}{5}[0,5 \times 5,60 + 0,5 \times 0] = 2,24.$$

Sử dụng các giá trị này, bây giờ chúng ta có thể tính:

$$\Delta_0 = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)} = 0,93;$$

$$\Delta_1(H) = \frac{V_2(HH) - V_2(HT)}{S_2(HH) - S_2(HT)} = 0,67;$$

$$\Delta_1(T) = \frac{V_2(TH) - V_2(TT)}{S_2(TH) - S_2(TT)} = 0.$$

Tính ngược theo thời gian, chúng ta có thể kiểm tra rằng:

$$X_1(H) = \Delta_0 S_1(H) + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) = 5,59; \quad V_1(H) = 5,60;$$
$$X_1(T) = \Delta_0 S_1(T) + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) = 0,01; \quad V_1(T) = 0;$$
$$X_1(HH) = \Delta_1(H) S_1(HH) + (1+r)(X_1(H) - \Delta_1(H) S_1(H)) = 11,01;$$
$$V_1(HH) = 11.$$

Ví dụ 2.3.3. (European Call). Giả sử cho $u = 2; d = 0,5; r = 0,25; S_0 = 4;$ $\bar{p} = \bar{q} = 0,5$ và xét một quyền chọn mua kiểu Âu với kỳ hạn 2 và hàm thu hoạch:

$$V_2 = (S_2 - 5)^+.$$

Nhận thấy rằng:

$$V_2(HH) = 11; \; V_2(HT) = V_2(TH) = 0; \; V_2(TT) = 0;$$

$$V_1(H) = \frac{4}{5}[\frac{1}{2} \times 11 + \frac{1}{2} \times 0] = 4,40;$$

$$V_1(T) = \frac{4}{5}[\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 0] = 0;$$

$$V_0 = \frac{4}{5}[\frac{1}{2} \times 4,40 + \frac{1}{2} \times 0] = 1,76.$$

Định nghĩa $v_k(x)$ là giá trị của quyền chọn mua tại thời điểm k khi $S_k = x$. Khi đó:

$$v_2(x) = (x-5)^+;$$

$$v_1(x) = \frac{4}{5}[\frac{1}{2} \times v_2(2x) + \frac{1}{2}v_2(x/2)];$$

$$v_0(x) = \frac{4}{5}[\frac{1}{2}v_1(2x) + \frac{1}{2}v_1(x/2)].$$

Đặc biệt

$$v_2(16) = 11; \quad v_2(4) = 0; \quad v_2(1) = 0;$$

$$v_1(8) = \frac{4}{5}[\frac{1}{2} \times 11 + \frac{1}{2} \times 0] = 4,40;$$

$$v_1(2) = \frac{4}{5}[\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 0] = 0;$$

$$v_0 = \frac{4}{5}[\frac{1}{2} \times 4,40 + \frac{1}{2} \times 0] = 1,76.$$

Giả sử $\delta_k(x)$ là số các cổ phiếu trong danh mục đầu tư có phòng hộ tại thời điểm k khi $S_k = x$. Khi đó:

$$\delta_k(x) = \frac{v_{k+1}(2x) - v_{k+1}(\frac{x}{2})}{2x - \frac{x}{2}}, \quad k = 0, 1.$$

2.4 Quá trình Markov

Trong mục này, chúng ta chỉ xét các hàm trên $\mathbb{R}$ và các tập con của $\mathbb{R}$ mà đo được Borel. tức là, chỉ xét những tập con A của $\mathbb{R}$ mà thuộc $\mathcal{B}$ và các hàm $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho g^{-1} là một hàm: $\mathcal{B} \to \mathcal{B}$.

Định nghĩa 2.4.1. *Giả sử $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ là một không gian xác suất và $\{\mathcal{F}_k\}_{k=0}^n$ là một lọc trong $\mathcal{F}$. Giả sử $\{X_k\}_{k=0}^n$ là một quá trình ngẫu nhiên trên $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Quá trình này được gọi là Markov nếu:*

i) Quá trình $\{X_k\}$ thích nghi với lọc $\{\mathcal{F}_k\}$,

ii) **(Tính Markov)**. *Với mỗi $k = 0, 1, ..., n-1$, phân phối của X_{k+1} với điều kiện trên $\mathcal{F}_k$ trùng phân phối của X_{k+1} với điều kiện X_k.*

2.4.1 Các phương pháp khác nhau biểu diễn tính Markov

(a) (Cùng phân phối). Với mọi $A \in \mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, ta có:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{k+1} \in A|\mathcal{F}_k) &= \mathbb{E}[\mathbb{I}_A(X_{k+1})|\mathcal{F}_k] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{I}_A(X_{k+1})|X_k] \\ &= \mathbb{P}[\mathbb{I}_A(X_{k+1})|X_k].\end{aligned}$$

(b) (Cùng kỳ vọng).

Với mọi hàm (đo được Borel) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mà $\mathbb{E}|h(X_{k+1})| < \infty$, ta có:

$$\mathbb{E}[h(X_{k+1})|\mathcal{F}_k] = \mathbb{E}[h(X_{k+1})|X_k].$$

(c) (Cùng biến đổi Laplace). Với mọi $u \in \mathbb{R}$ mà $\mathbb{E}e^{uX_{k+1}} < \infty$, ta có:

$$\mathbb{E}\left[e^{uX_{k+1}}|\mathcal{F}_k\right] = \mathbb{E}\left[e^{uX_{k+1}}|X_k\right].$$

(Nếu chúng ta cố định u và định nghĩa $h(x) = e^{ux}$, thì các phương trình (b) và (c) là giống nhau. Tuy vậy, điều kiện trong (b) thu được với mọi hàm h, còn trong (c) ta giả thiết điều kiện này chỉ với các hàm h có dạng $h(x) = e^{ux}$. Một kết quả chính trong lý thuyết biến đổi Laplace là nếu phương trình thu được với mọi h có dạng đặc biệt, thì nó thu được với mọi h, tức là (c) suy ra (b)).

(d) (Cùng các hàm đặc trưng). Với mọi $u \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\mathbb{E}\left[e^{iuX_{k+1}}|\mathcal{F}_k\right] = \mathbb{E}\left[e^{iuX_{k+1}}|X_k\right].$$

ở đó $i = \sqrt{-1}$. (Vì $|e^{iux}| = |\cos x + \sin x| \le 1$ chúng ta không cần giả thiết rằng $\mathbb{E}|e^{iux}| < \infty$).

Các điều kiện (a)-(d) là tương đương. Tính chất Markov trong (a)-(d) bao gồm quá trình tại thời điểm "hiện tại" k và một thời điểm tương lai $k+1$. Các điều kiện (a)-(d) cũng đúng với các điều kiện bao gồm quá trình tại thời điểm k và các thời điểm tương lai khác.

Chú ý 2.4.1. *Tất cả các tính chất Markov này còn đúng với các quá trình giá trị vector.*

Dễ thấy rằng quá trình giá chứng khoán trong mô hình nhị phân là một quá trình Markov. Nếu ta muốn ước lượng phân phối của S_{k+1} trên cơ sở thông tin trong $\mathcal{F}_k$, chỉ một thông tin là giá trị của S_k có liên quan. Chẳng hạn:

$$\widetilde{\mathbb{E}}[S_{k+1}|\mathcal{F}_k] = (\tilde{p}u + \tilde{q}d)S_k = (1+r)S_k \tag{2.26}$$

là một hàm của S_k. Tuy vậy, tính chất Markov (b) mạnh hơn (2.26). Tính chất Markov yêu cầu với bất kỳ hàm h, $\widetilde{\mathbb{E}}[h(S_{k+1})|\mathcal{F}_k]$ là hàm của S_k; trong khi phương trình (2.26) chỉ là trường hợp $h(x) = x$.

Ví dụ 2.4.1. Xét một mô hình nhị phân với 66 thời kỳ và một chứng khoán phái sinh kiểu Âu đơn giản mà thu hoạch tại thời kỳ 66 là:

$$V_{66} = \frac{1}{3}(S_{64} + S_{65} + S_{66}).$$

Vì quá trình giá chứng khoán là Markov, giá trị của chứng khoán, chẳng hạn tại thời kỳ 50 là:

$$\begin{aligned} V_{50} &= (1+r)^{50}\widetilde{\mathbb{E}}[(1+r)^{-66}V_{66}|\mathcal{F}_{50}] \\ &= (1+r)^{-16}\widetilde{\mathbb{E}}[V_{66}|S_{50}], \text{ (sử dụng tính chất Markov (b)).} \end{aligned}$$

2.4.2 Bổ đề về sự độc lập

Giả sử X và Y là các biến ngẫu nhiên trên một không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ và $\mathcal{G}$ là một σ-đại số con của $\mathcal{F}$. Giả sử $f(x,y)$ là một hàm hai biến, đặt:

$$g(y) = \mathbb{E}[f(X,y)].$$

Ta có bổ đề sau:

Bổ đề 2.4.1. *Giả sử X độc lập với $\mathcal{G}$ và Y là $\mathcal{G}$-đo được. Khi đó, ta có:*

$$\mathbb{E}[f(X,Y)|\mathcal{G}] = g(Y).$$

Chú ý 2.4.2. - *Trong bổ đề này và các thảo luận sau, các chữ viết in hoa ký hiệu cho biến ngẫu nhiên và chữ viết in thường ký hiệu cho biến không ngẫu nhiên.*

- *Bổ đề này thường dùng để chỉ ra một quá trình là Markov.*

Ví dụ 2.4.2. (Quá trình giá cổ phiếu là Markov). Xét một mô hình nhị phân n thời kỳ. Cố định một thời điểm k và định nghĩa $X = \dfrac{S_{k+1}}{S_k}$ và $\mathcal{G} = \mathcal{F}_k$. Khi đó $X = u$ nếu $\omega_{k+1} = H$ và $X = d$ nếu $\omega_{k+1} = T$. Vì X chỉ phụ thuộc vào lần tung thứ $(k+1)$ nên X độc lập với $\mathcal{G}$. Đặt $Y = S_k$, thế thì Y là $\mathcal{G}$-đo được. Giả sử h là một hàm tuỳ ý và đặt $f(x,y) = h(xy)$. Khi đó:

$$g(y) = \mathbb{E}[f(X,y)] = \mathbb{E}[h(Xy)] = ph(uy) + qh(dy).$$

Theo bổ đề 2.4.1, ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[h(S_{k+1})|\mathcal{F}_k] &= \mathbb{E}[h(\frac{S_{k+1}}{S_k}S_k)|\mathcal{F}_k] \\
&= \mathbb{E}[f(X,Y)|\mathcal{G}] \\
&= g(Y) \\
&= ph(uS_k) + qh(dS_k).
\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ quá trình giá cổ phiếu là Markov. Thực vậy, nếu lấy kỳ vọng điều kiện cả hai vế của phương trình trên với điều kiện $\sigma(S_k)$ và sử dụng tính chất tháp trên vế trái, để ý rằng vế phải là $\sigma(S_k)$-đo được, ta có:

$$\mathbb{E}[h(S_{k+1})|S_k] = ph(uS_k) + qh(dS_k).$$

Vì thế $\mathbb{E}[h(S_{k+1})|\mathcal{F}_k] = \mathbb{E}[h(S_{k+1})|S_k]$ và theo (b) tính chất Markov được chứng minh.

2.4.3 Ứng dụng cho Exotic Option (Quyền chọn cá biệt)

Xét một mô hình n-thời kỳ, với độ đo xác suất trung hòa rủi ro $\widetilde{\mathbb{P}}$. Định nghĩa maximum chạy của giá chứng khoán là:

$$M_k = \max_{1\le j\le k} S_j.$$

Xét một chứng khoán phái sinh kiểu Âu đơn giản với thu hoạch tại thời điểm n là $v_n(S_n, M_n)$.

Ví dụ 2.4.3. + $v_n(S_n, M_n) = (M_n - K)^+$ (Lookback option);
+ $v_n(S_n, M_n) = \mathbb{I}_{M_n \ge B}(M_n - K)^+$ (Knock-in Barrier option).

Bổ đề 2.4.2. *Quá trình hai chiều* $\{(S_k, M_k)\}_{k=0}^n$ *là Markov.*

Chứng minh. Cố định k, ta có:

$$M_{k+1} = M_k \vee S_{k+1},$$

trong đó $\vee$ biểu thị maximum của hai đại lượng. Giả sử $Z = \frac{S_{k+1}}{S_k}$, khi đó:

$$\widetilde{\mathbb{P}}(Z = u) = \tilde{p}, \quad \widetilde{\mathbb{P}}(Z = d) = \tilde{q},$$

và Z độc lập với $\mathcal{F}_k$. Giả sử $h(x, y)$ là một hàm hai biến, ta có:

$$\begin{aligned} h(S_{k+1}, M_{k+1}) &= h(S_{k+1}, M_k \vee S_{k+1}) \\ &= h(ZS_k, M_k \vee (ZS_k)). \end{aligned}$$

Định nghĩa

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \widetilde{\mathbb{E}} h(Zx, y \vee (Zx)) \\ &= \tilde{p} h(ux, y \vee (ux)) + \tilde{q} h(dx, y \vee (dx)). \end{aligned}$$

Từ bổ đề 2.4.1 suy ra

$$\widetilde{\mathbb{E}}[h(S_{k+1}, M_{k+1}) | \mathcal{F}_k] = g(S_k, M_k) = \tilde{p} h(uS_k, M_k \vee (uS_k)) + \tilde{q} h(dS_k, M_k).$$

trong đó đẳng thức thứ hai suy ra từ hệ thức $M_k \wedge dS_k = M_k$. Vì vế phải của đẳng thức trên là một hàm của (S_k, M_k), tính chất Markov (dạng (b)) của quá trình hai chiều này được chứng minh. □

Xét một quyền chọn cá biệt trong Bổ đề trên. Ký hiệu V_k là giá trị của chứng khoán phái sinh tại thời điểm k. Vì $(1+r)^{-k} V_k$ là một martingale dưới độ đo $\widetilde{\mathbb{P}}$, ta có:

$$V_k = \frac{1}{1+r} \widetilde{\mathbb{E}}[V_{k+1} | \mathcal{F}_k], k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Tại thời điểm cuối cùng, ta có:

$$V_n = v_n(S_n, M_n).$$

Quay lại trước đó một bước, ta có thể tính:

$$\begin{aligned} V_{n-1} &= \frac{1}{1+r} \widetilde{\mathbb{E}}[v_n(S_n, M_n) | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= \frac{1}{1+r} [\tilde{p} v_n(uS_{n-1}, uS_{n-1} \vee M_{n-1}) + \tilde{q} v_n(dS_{n-1}, M_{n-1})]. \end{aligned}$$

Điều này dẫn ta đến định nghĩa:

$$v_{n-1}(x,y) = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}v_n(ux, ux \vee y) + \tilde{q}v_n(dx,y)]$$

vì

$$V_{n-1} = v_{n-1}(S_{n-1}, M_{n-1}).$$

Một cách tổng quát ta có:

$$v_k(x,y) = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}v_{k+1}(ux, ux \vee y) + \tilde{q}v_{k+1}(dx,y)],$$

và giá trị của quyền chọn tại thời điểm k là $v_k(S_k, M_k)$. Vì đây là một quyền chọn kiểu Âu đơn giản, danh mục đầu tư có phòng hộ trong trường hợp này là:

$$\Delta_k = \frac{v_{k+1}(uS_k, (uS_k) \vee M_k) - v_{k+1}(dS_k, M_k)}{(u-d)S_k}.$$

2.5 Thời điểm dừng và các quyền chọn kiểu Mỹ

2.5.1 Định giá một quyền chọn kiểu Mỹ

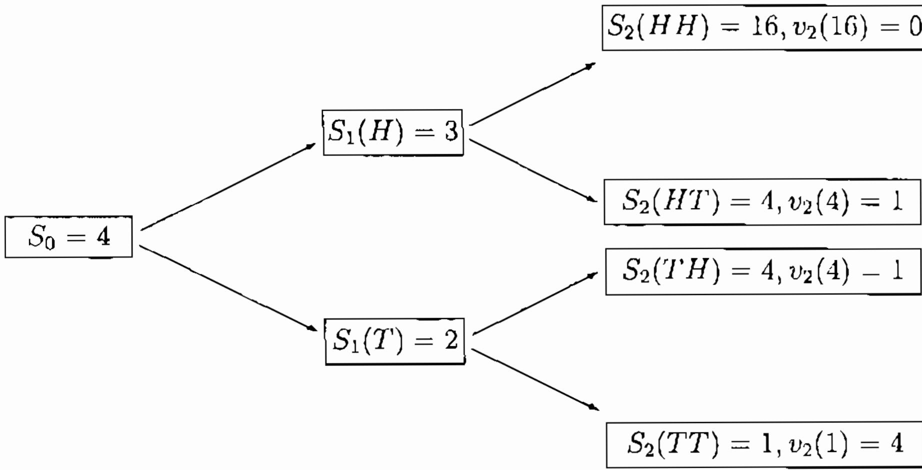
Xét mô hình nhị phân với n thời kỳ. Giả sử $V_n = g(S_n)$ là thu hoạch của một quyền chọn kiểu Âu trong mô hình. Định nghĩa bởi phép đệ quy ngược:

$$v_n(x) = g(x)$$
$$v_k(x) = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}v_{k+1}(ux) + \tilde{q}v_{k+1}(dx)].$$

Khi đó $v_k(S_k)$ là giá trị của quyền chọn tại thời điểm k, và danh mục đầu tư phòng hộ cho bởi:

$$\Delta_k = \frac{v_{k+1}(uS_k) - v_{k+1}(dS_k)}{(u-d)S_k}, \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

Bây giờ ta xét một quyền chọn kiểu Mỹ và hàm g như ở trên. Khác với quyền chọn kiểu Âu, người giữ quyền chọn kiểu Mỹ có thể "thực hiện" trong thời kỳ



Hình 2.4: Giá chứng khoán và giá trị cuối cùng của một quyền chọn bán kiểu Mỹ với giá hợp đồng là 5.

k bất kỳ, và nhận được số tiền là $g(S_k)$. Vì thế, danh mục đầu tư phòng hộ cần phải tạo ra một quá trình thu nhập thoả mãn:

$$X_k \geq g(S_k), \forall k, \quad \text{hầu chắc chắn.}$$

Diều này là bởi vì giá trị của quyền chọn tại thời điểm k ít nhất là $g(S_k)$, và quá trình tài sản tại thời điểm đó cần phải bằng giá trị của quyền chọn.

Giá trị của một quyền chọn kiểu Mỹ có thể xác định theo thuật toán sau:

$$\begin{aligned} v_n(x) &= g(x) \\ v_k(x) &= \max\left\{\frac{1}{1+r}[\bar{p}v_{k+1}(ux) + \bar{q}v_{k+1}(dx)], g(x)\right\} \end{aligned}$$

trong đó $v_k(S_k)$ là giá trị của quyền chọn tại thời điểm k.

Ví dụ 2.5.1. Cho $S_0 = 4; u = 2;\ d = 0,5;\ r = 0,25;\ \bar{p} = \bar{q} = 0,5;\ n = 2.$

Đặt $v_2(x) = g(x) = (5 - x)^+$ (xem hình 2.4). Khi đó:

$$\begin{aligned} v_1(8) &= \max\{\frac{4}{5}[\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1]; (5-8)^+\} \\ &= \max\{\frac{2}{5}; 0\} \\ &= 0,40; \\ v_1(2) &= \max\{\frac{4}{5}[\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 4]; (5-2)^+\} \\ &= \max\{2; 3\} \\ &= 3,00; \\ v_0(4) &= \max\{\frac{4}{5}[\frac{1}{2} \times 0,4 + \frac{1}{2} \times 3,0]; (5-4)^+\} \\ &= \max\{1,36; 1\} \\ &= 1,36. \end{aligned}$$

Bây giờ, giả sử chúng ta cấu trúc một danh mục đầu tư phòng hộ cho quyền chọn này. Bắt đầu với vốn $X_0 = 1,36$. Ta tính Δ_0 như sau:

$$\begin{aligned} 0,40 &= v_1(S_1(H)) \\ &= S_1(H)\Delta_0 + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) \\ &= 8\Delta_0 + \frac{5}{4}(1,36 - 4\Delta_0) \\ &= 3\Delta_0 + 1,70 \Rightarrow \Delta_0 = -0,43. \end{aligned}$$

Tương tự ta cũng có

$$\begin{aligned} 3,00 &= v_1(S_1(T)) \\ &= S_1(T)\Delta_0 + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) \\ &= 2\Delta_0 + \frac{5}{4}(1,36 - 4\Delta_0) \\ &= -3\Delta_0 + 1,70 \Rightarrow \Delta_0 = -0,43. \end{aligned}$$

Sử dụng $\Delta_0 = -0.43$ cho kết quả

$$X_1(H) = v_1(S_1(H)) = 0,40; \quad X_1(T) = v_1(S_1(T)) = 3,00.$$

Bây giờ giả sử chúng ta tính Δ_1 (Nhắc lại rằng $S_1(T) = 2$):

$$\begin{aligned} 1 &= v_2(4) \\ &= S_2(TH)\Delta_1(T) + (1+r)(X_1(T) - \Delta_1(T)S_1(T)) \\ &= 4\Delta_1(T) + \frac{5}{4}(3 - 2\Delta_1(T)) \\ &= 1,5\Delta_1(T) + 3,75 \Rightarrow \Delta_1(T) = -1,83. \end{aligned}$$

Ta cũng có

$$\begin{aligned} 4 &= v_2(1) \\ &= S_2(TT)\Delta_1(T) + (1+r)(X_1(T) - \Delta_1(T)S_1(T)) \\ &= \Delta_1(T) + \frac{5}{4}(3 - 2\Delta_1(T)) \\ &= -1,5\Delta_1(T) + 3,75 \Rightarrow \Delta_1(T) = -0,16. \end{aligned}$$

Chúng ta nhận được những câu trả lời khác cho $\Delta_1(T)$! Nếu ta có $X_1(T) = 2$, giá trị của quyền chọn bán kiểu Âu, ta sẽ có

$$\begin{aligned} 1 &= 1,5\Delta_1(T) + 2,5 \Rightarrow \Delta_1(T) = -1; \\ 4 &= -1,5\Delta_1(T) + 2,5 \Rightarrow \Delta_1(T) = -1. \end{aligned}$$

2.5.2 Thời điểm dừng

Cho không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ và $\{\mathcal{F}_k\}_{k=0}^n$ là một bộ lọc.

Định nghĩa 2.5.1. *Một thời điểm dừng là một biến ngẫu nhiên*

$$\tau : \Omega \to \{0, 1, 2, ..., n\} \cup \{\infty\}$$

có tính chất: $\{\omega \in \Omega; \tau(\omega) = k\} \in \mathcal{F}_k, \forall k = 0, 1, 2, ..., n, \infty.$

Ví dụ 2.5.2. Xét một mô hình nhị phân với 2 thời kỳ, $S_0 = 4$, $u = 2$; $d = 0,5$; $r = 0,25$; khi đó $\tilde{p} = \tilde{q} = 0,5$. Giả sử v_0, v_1, v_2 là các giá trị của hàm thu hoạch cho quyền chọn bán kiểu Mỹ với giá thực hiện là 5. Định nghĩa:

$$\tau(\omega) = \min\{k; v_k(S_k)\}, \text{ với } v_k(S_k) = (5 - S_k)^+.$$

Thời điểm dừng τ biểu diễn "thời điểm đầu tiên giá trị của quyền chọn cân bằng với giá trị thực chất của nó". Đây là một thời điểm thực hiện tối ưu. Ta nhận thấy rằng:

$$\tau(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \omega \in A_T \\ 2 & \text{nếu } \omega \in A_H \end{cases}$$

Ta kiểm tra được rằng τ quả thực là một thời điểm dừng:

$$\{\omega : \tau(\omega) = 0\} = \emptyset \in \mathcal{F}_0$$
$$\{\omega : \tau(\omega) = 1\} = A_T \in \mathcal{F}_1$$
$$\{\omega : \tau(\omega) = 2\} = A_H \in \mathcal{F}_2.$$

Ví dụ 2.5.3. (Một thời điểm ngẫu nhiên mà không là thời điểm dừng). Trong cùng mô hình nhị phân ở ví dụ trước, định nghĩa:

$$\rho(\omega) = \min\{k\ ;\ S_k(\omega)\} \text{ với } S_k(\omega) = m_2(\omega) \triangleq \min_{0\le j\le 2} S_j(\omega)$$

Nói cách khác ρ dừng khi giá cổ phiếu chạm tới giá trị nhỏ nhất của nó. Biến ngẫu nhiên này được cho bởi:

$$\rho(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \omega \in A_H \\ 1 & \text{nếu } \omega = TH \\ 2 & \text{nếu } \omega = TT \end{cases}$$

Ta kiểm tra rằng ρ không là một thời điểm dừng:

$$\{\omega : \rho(\omega) = 0\} = A_H \notin \mathcal{F}_0$$
$$\{\omega : \rho(\omega) = 1\} = \{TH\} \notin \mathcal{F}_1$$
$$\{\omega : \rho(\omega) = 2\} = \{TT\} \in \mathcal{F}_2.$$

2.5.3 Thông tin tăng tới một thời điểm dừng

Định nghĩa 2.5.2. *Giả sử τ là một thời điểm dừng. Ta nói rằng một tập $A \in \Omega$ được xác định bởi thời điểm dừng τ nếu thoả mãn*

$$A \cap \{\omega : \tau(\omega) = k\} \in \mathcal{F}_k, \forall k.$$

Họ của các tập xác định bởi τ là một σ-đại số, ký hiệu là $\mathcal{F}_\tau$.

Ví dụ 2.5.4. Trong mô hình nhị phân đã xét trước đây, đặt:

$$\tau(\omega) = \min\{k\ ; v_k(S_k)\}, \text{ với } v_k(S_k) = (5 - S_k)^+,$$

tức là:

$$\tau(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \omega \in A_T \\ 2 & \text{nếu } \omega \in A_H \end{cases}$$

Tập $\{HT\}$ xác định bởi thời điểm τ nhưng tập $\{TH\}$ thì không. Thực vậy,

$$\{HT\} \cap \{\omega : \tau(\omega) = 0\} = \emptyset \in \mathcal{F}_0$$
$$\{HT\} \cap \{\omega : \tau(\omega) = 1\} = \emptyset \in \mathcal{F}_1$$
$$\{HT\} \cap \{\omega : \tau(\omega) = 2\} = \{HT\} \in \mathcal{F}_2$$

nhưng

$$\{TH\} \cap \{\omega : \tau(\omega) = 1\} = \{TH\} \notin \mathcal{F}_1.$$

Các nhân tử của $\mathcal{F}_\tau$ là:

$$\{HT\}, \{HH\}, A_T = \{TH, TT\}.$$

Nhận xét (Giá trị của quá trình ngẫu nhiên tại một thời điểm dừng): Nếu $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ là một không gian xác suất, $\{\mathcal{F}_k\}_{k=0}^n$ là một lọc dưới $\mathcal{F}$, $\{X_k\}_{k=0}^n$ là một quá trình ngẫu nhiên thích nghi với bộ lọc này, và τ là một thời điểm dừng đối với cùng lọc, khi đó X_τ là một biến ngẫu nhiên $\mathcal{F}_\tau$-đo được mà giá trị tại ω được cho bởi:

$$X_\tau(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega).$$

Định lý 2.5.1. (Optional Sampling). *Giả sử rằng $\{Y_k, \mathcal{F}_k\}_{k=0}^\infty$ là một martingale dưới (hoặc $\{Y_k, \mathcal{F}_k\}_{k=0}^n$ là một martingale dưới). Giả sử τ và ρ là các thời điểm dừng bị chặn, tức là, có một số không ngẫu nhiên n sao cho:*

$$\tau \le n, \ \rho \le n, \ \text{hầu chắc chắn.}$$

Nếu $\tau \le \rho$ hầu chắc chắn, thì

$$Y_\tau \le \mathbb{E}(Y_\rho | \mathcal{F}_\tau). \tag{2.27}$$

Lấy kỳ vọng hai vế (2.27) ta thu được $\mathbb{E}(Y_\tau) \le \mathbb{E}(Y_\rho)$ và trong trường hợp riêng, $Y_0 = \mathbb{E}(Y_0) \le \mathbb{E}(Y_\rho)$.
Nếu $\{Y_k, \mathcal{F}_k\}_{k=0}^\infty$ là một martingale trên, thì $\tau \le \rho$ suy ra $Y_\tau \ge \mathbb{E}(Y_\rho, \mathcal{F}_\tau)$.
Nếu $\{Y_k, \mathcal{F}_k\}_{k=0}^\infty$ là một martingale, thì $\tau \le \rho$ suy ra $Y_\tau = \mathbb{E}(Y_\rho, \mathcal{F}_\tau)$.

Ví dụ 2.5.5. Trong ví du 2.5.4, ta định nghĩa $\rho(\omega) = 2$ với mọi $\omega \in \Omega$. Dưới độ đo xác suất trung hòa rủi ro, quá trình giá cổ phiếu đã chiết khấu $(\frac{5}{4})^{-k}S_k$ là một martingale. Ta tính

$$\widetilde{\mathbb{E}}[(\frac{4}{5})^2 S_2 | \mathcal{F}_\tau].$$

Nhân tử của $\mathcal{F}_\tau$ là $\{HH\}, \{HT\}$, và A_T. Vì thế cho nên:

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\left((\frac{4}{5})^2 S_2\right) \middle| \mathcal{F}_\tau\right](HH) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 S_2(HH),$$

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\left((\frac{4}{5})^2 S_2\right) \middle| \mathcal{F}_\tau\right](HT) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 S_2(HT),$$

và với $\omega \in A_T$,

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{E}}\left[\left((\frac{4}{5})^2 S_2\right) \middle| \mathcal{F}_\tau\right](\omega) &= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2 S_2(TH) + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2 S_2(TT) \\ &= \frac{1}{2} \times 2,56 + \frac{1}{2} \times 0,64 \\ &= 1,60.\end{aligned}$$

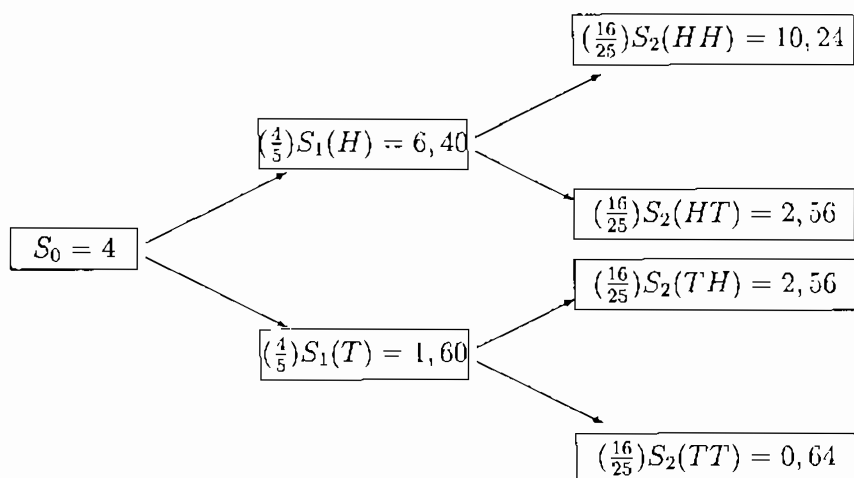
Trong mọi trường hợp ta có (xem hình 2.5)

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\left((\frac{4}{5})^2 S_2\right) \middle| \mathcal{F}_\tau\right](HT) = \left(\frac{4}{5}\right)^{-\tau(\omega)} S_{-\tau(\omega}(\omega).$$

2.6 Các tính chất của chứng khoán phái sinh kiểu Mỹ

2.6.1 Các tính chất

Định nghĩa 2.6.1. *Một chứng khoán phái sinh kiểu Mỹ (American Derivative Securities) là một dãy các biến ngẫu nhiên không âm $\{G_k\}_{k=0}^n$ sao cho mỗi G_k là $\mathcal{F}_k$-đo được. Người sở hữu một chứng khoán phái sinh kiểu Mỹ có thể thực hiện tại bất kỳ thời điểm k, và nếu anh ta thực hiện, anh ta nhận được thu hoạch G_k.*



Hình 2.5: Minh họa định lý Optional Sampling.

Từ định nghĩa ta có:

(a) Giá trị V_k của chứng khoán tại thời điểm k là:

$$V_k = \max_{\tau}(1+r)^k \widetilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-\tau} G_\tau | \mathcal{F}_k\right],$$

ở đó maximum lấy trên tất cả các thời điểm dừng τ thoả mãn $\tau \geq k$, hầu chắc chắn.

(b) Quá trình giá trị chiết khấu $\{(1+r)^{-k}V_k\}_{k=0}^{n}$ là martingale trên nhỏ nhất thoả mãn:

$$V_k \geq G_k, \ \forall k, \text{ hầu chắc chắn.}$$

(c) Bất kỳ thời điểm dừng τ thoả mãn:

$$V_0 = \widetilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-\tau} G_\tau\right]$$

là một thời điểm thực hiện tối ưu. Trong trường hợp riêng

$$\tau \triangleq \min\{k \, ; \, V_k = G_k\}$$

là một thời điểm thực hiện tối ưu.

(d) Với $k = 1, 2, ..., n-1$, danh mục đầu tư có phòng hộ cho bởi:

$$\Delta_k(\omega_1, ..., \omega_k) = \frac{V_{k+1}(\omega_1, ..., \omega_k, H) - V_{k+1}(\omega_1, ..., \omega_k, T)}{S_{k+1}(\omega_1, ..., \omega_k, H) - S_{k+1}(\omega_1, ..., \omega_k, T)}.$$

(e) Giả sử với k và ω nào đó, ta có $V_k(\omega) = G_k(\omega)$. Khi đó người sở hữu chứng khoán phái sinh cần phải thực hiện nó. Nếu ông ta không thực hiện, thì người bán chứng khoán có thể tiêu thụ một cách trực tiếp:

$$V_k(\omega) - \frac{1}{1+r}\widetilde{\mathbb{E}}\left[V_{k+1}|\mathcal{F}_k\right](\omega)$$

và vẫn duy trì phòng hộ.

2.6.2 Chứng minh các tính chất

Giả sử $\{G_k\}_{k=0}^n$ là một dãy các biến ngẫu nhiên không âm sao cho mỗi G_k là $\mathcal{F}_k$-đo được. Định nghĩa T_k là tập của tất cả các thời điểm dừng τ thoả mãn $k \le \tau \le n$ hầu chắc chắn. Cũng định nghĩa:

$$V_k \triangleq (1+r)^k \max_{\tau \in T_k} \widetilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-\tau} G_\tau | \mathcal{F}_k\right].$$

Bổ đề 2.6.1. *$V_k \ge G_k$ với mọi k.*

Chứng minh. Lấy $\tau \in T_k$ là hằng số k. □

Bổ đề 2.6.2. *Quá trình $\{(1+r)^{-k}V_k\}_{k=0}^n$ là một martingale trên.*

Chứng minh. Giả sử τ^* đạt được maximum trong định nghĩa của V_{k+1}, tức là:

$$(1+r)^{-(k+1)}V_{k+1} = \widetilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-\tau^*} G_{\tau^*} | \mathcal{F}_{k+1}\right]$$

Vì τ^* cũng thuộc T_k, ta có:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-(k+1)}V_{k+1}|\mathcal{F}_k\right] &= \widetilde{\mathbb{E}}\left[\widetilde{E}\left[(1+r)^{-\tau^*} G_{\tau^*} | \mathcal{F}_{k+1}\right] | \mathcal{F}_k\right] \\
&= \widetilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-\tau^*} G_{\tau^*} | \mathcal{F}_k\right] \\
&\le \max_{\tau \in T_k} \widetilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-\tau} G_\tau | \mathcal{F}_k\right] \\
&= (1+r)^{-k} V_k.
\end{aligned}$$

□

Bổ đề 2.6.3. *Nếu $\{Y_k\}_{k=0}^n$ là một quá trình khác thoả mãn*

$$Y_k \geq G_k, \quad k = 0, 1, ..., n, \quad \text{hầu chắc chắn}$$

và $\{(1+r)^{-k}Y_k\}_{k=0}^n$ là một martingale trên, thì

$$Y_k \geq V_k, \quad k = 0, 1, ..., n, \quad \text{hầu chắc chắn}$$

Chứng minh. Sử dụng định lý 2.5.1 (định lý Optional Sampling) với martingale trên $\{(1+r)^{-k}Y_k\}_{k=0}^n$ ta có:

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-\tau}Y_\tau|\mathcal{F}_k\right] \leq (1+r)^{-k}Y_k, \forall \tau \in T_k.$$

Vì thế cho nên:

$$\begin{aligned} V_k &= (1+r)^k \max_{\tau \in T_k} \widetilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-\tau}G_\tau|\mathcal{F}_k\right] \\ &\leq (1+r)^k \max_{\tau \in T_k} \widetilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-\tau}Y_\tau|\mathcal{F}_k\right] \\ &\leq (1+r)^{-k}(1+r)^k Y_k \\ &= Y_k. \end{aligned}$$

□

Bổ đề 2.6.4. *Đặt:*

$$\begin{aligned} C_k &= V_k - \frac{1}{1+r}\widetilde{\mathbb{E}}[V_{k+1}|\mathcal{F}_k] \\ &= (1+r)^k\left\{(1+r)^{-k}V_k - \widetilde{\mathbb{E}}[(1+r)^{-(k+1)}V_{k+1}|\mathcal{F}_k]\right\}. \end{aligned}$$

Vì $\{(1+r)^{-k}V_k\}_{k=0}^n$ là một martingale trên, C_k cần phải không âm hầu chắc chắn. Định nghĩa:

$$\Delta_k(\omega_1, ..., \omega_k) = \frac{V_{k+1}(\omega_1, ..., \omega_k, H) - V_{k+1}(\omega_1, ..., \omega_k, T)}{S_{k+1}(\omega_1, ..., \omega_k, H) - S_{k+1}(\omega_1, ..., \omega_k, T)}.$$

Đặt $X_0 = V_0$ và định nghĩa hồi quy

$$X_{k+1} = \Delta_k S_{k+1} + (1+r)(X_k - C_k - \Delta_k S_k).$$

Khi đó $X_k = V_k \ \forall k.$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo k. Giả thiết quy nạp rằng $X_k = V_k$, với $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ nào đó, tức là với mỗi $(\omega_1, ..., \omega_k)$ ta có:

$$X_k(\omega_1, ..., \omega_k) = V_k(\omega_1, ..., \omega_k).$$

Ta cần chỉ ra rằng:

$$\begin{aligned} X_{k+1}(\omega_1, ..., \omega_k, H) &= V_{k+1}(\omega_1, ..., \omega_k, H), \\ X_{k+1}(\omega_1, ..., \omega_k, T) &= V_{k+1}(\omega_1, ..., \omega_k, T). \end{aligned}$$

Ta chứng minh đẳng thức thứ nhất, đẳng thức thứ hai nhận được tương tự. Trước tiên nhận thấy rằng:

$$V_{k+1}(\omega_1, ..., \omega_k) - C_k(\omega_1, ..., \omega_k) = \frac{1}{1+r}\widetilde{E}\left[V_{k+1}|\mathcal{F}_k\right](\omega_1, ..., \omega_k)$$
$$= \frac{1}{1+r}(\overline{p}V_{k+1}(\omega_1, ..., \omega_k, H) + \overline{q}V_{k+1}(\omega_1, ..., \omega_k, T)).$$

Vì $(\omega_1, ..., \omega_k)$ sẽ được cố định trong chứng minh, ta sẽ bỏ đi ký hiệu này. Chẳng hạn, phương trình cuối cùng có thể viết đơn giản như sau:

$$V_k - C_k = \frac{1}{1+r}(\overline{p}V_{k+1}(H) + \overline{q}V_{k+1}(T)).$$

Ta tính

$$\begin{aligned} X_{k+1}(H) &= \Delta_k S_{k+1}(H) + (1+r)(X_k - C_k - \Delta_k S_k) \\ &= \frac{V_{k+1}(H) - V_{k+1}(T)}{S_{k+1}(H) - S_{k+1}(T)}(S_{k+1}(H) - (1+r)S_k) + (1+r)(V_k - C_k) \\ &= \frac{V_{k+1}(H) - V_{k+1}(T)}{(u-d)S_k}(uS_k - (1+r)S_k) + \overline{p}V_{k+1}(H) + \overline{q}V_{k+1}(T) \\ &= (V_{k+1}(H) - V_{k+1}(T))\overline{q} + \overline{p}V_{k+1}(H) + \overline{q}V_{k+1}(T) \\ &= V_{k+1}(H). \end{aligned}$$

□

2.6.3 Các chứng khoán phái sinh phức hợp kiểu Âu

Để dễ hình dung về thời điểm dừng tối ưu cho một chứng khoán phái sinh kiểu Mỹ, ta nghiên cứu các chứng khoán phái sinh phức hợp kiểu Âu.

Một chứng khoán phái sinh phức hợp kiểu Âu chứa $n+1$ chứng khoán phái sinh đơn giản kiểu Âu (với cùng cổ phiếu cơ bản) đáo hạn tại các thời điểm 0, 1, ..., n; chứng khoán mà đáo hạn tại thời điểm j có thu hoạch C_j. Vì thế, một chứng khoán phái sinh phức hợp kiểu Âu được thoả mãn bởi quá trình $\{C_j\}_{j=0}^n$ ở đó mỗi C_j là $\mathcal{F}_j$ đo được, tức là, quá trình $\{C_j\}_{j=0}^n$ thích nghi với bộ lọc $\{\mathcal{F}_k\}_{k=0}^n$.

Phòng hộ một đoản vị (một thu hoạch - one payment): Ta có thể phòng hộ cho một vị thế ngắn hạn trong chứng khoán phái sinh kiểu Âu thứ k. Giá trị của chứng khoán phái sinh kiểu Âu j tại thời điểm k cho bởi:

$$V_k^j = (1+r)^k \widetilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-j} C_j | \mathcal{F}_k\right], k = 0, ..., j,$$

và danh mục đầu tư phòng hộ cho chứng khoán này được cho bởi:

$$\Delta_k^{(j)}(\omega_1, ..., \omega_k) = \frac{V_{k+1}^{(j)}(\omega_1, ..., \omega_k, H) - V_{k+1}^{(j)}(\omega_1, ..., \omega_k, T)}{S_{k+1}^{(j)}(\omega_1, ..., \omega_k, H) - S_{k+1}^{(j)}(\omega_1, ..., \omega_k, T)}, k = 0, 1, ..., j-1.$$

Thực vậy, bắt đầu với $V_0^{(j)}$ và sử dụng danh mục đầu tư $(\Delta_0^{(j)}, ..., \Delta_{j-1}^{(j)})$ ta có thể chắc chắn rằng tại thời điểm j ta có C_j.

Phòng hộ một đoản vị (tất cả các thu hoạch - payments): Bây giờ ta tìm cách phòng hộ cho mỗi thu hoạch. Bắt đầu với $V_0 = \sum_{j=0}^n V_0^{(j)}$. Tại mỗi thời điểm $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, trước tiên làm một thu hoạch C_k và sử dụng danh mục đầu tư:

$$\Delta_k = \Delta_k^{(k+1)} - \Delta_k^{(k+2)} + ... + \Delta_k^{(n)}$$

biểu diễn tất cả các thu hoạch trong tương lai. Tại thời điểm n sau khi làm thu hoạch cuối cùng C_n, ta sẽ có chính xác giá trị ban đầu.

Giả sử bạn sở hữu một chứng khoán phái sinh phức hợp kiểu Âu $\{C_j\}_{k=0}^n$. Tính

$$V_0 - \sum_{j=0}^n V_0^{(j)} = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{j=0}^n (1+r)^{-j} C_j\right]$$

và sử dụng danh mục đầu tư có phòng hô là $\{\Delta_k\}_{k=0}^{n-1}$. Bạn có thể vay V_0 và tiêu thụ nó một cách trực tiếp. Bạn bỏ ra $X_0 = -V_0$. Trong mỗi thời kỳ k, nhận thu hoạch C_k và sau đó sử dụng danh mục đầu tư $-\Delta_k$. Tại thời điểm cuối cùng n, sau khi nhận thu hoạch C_n tài sản của bạn sẽ trở về 0, tức là bạn sẽ không mắc nợ nữa.

2.6.4 Thời điểm thực thi tối ưu của chứng khoán phái sinh kiểu Mỹ

Trong mục này, chúng ta tìm thời điểm thực hiện tối ưu cho người sở hữu một chứng khoán phái sinh kiểu Mỹ. Giả sử $\{G_k\}_{k=0}^n$ là một chứng khoán phái sinh kiểu Mỹ. Giả sử τ là thời điểm dừng người sở hữu có kế hoạch sử dụng (Chúng ta giả sử rằng mỗi G_k là không âm, vì thế không giảm tính tổng quát ta có thể giả thiết rằng người sở hữu dừng tại thời điểm đáo hạn n nếu không thực hiện trước đó). Sử dụng thời điểm dừng τ, trong thời kỳ j người sở hữu nhận được thu hoạch

$$C_j = \mathbb{I}_{\{\tau=j\}} G_j$$

Nói cách khác, mỗi khi ông ta chọn một thời điểm dừng, người sở hữu có một chứng khoán phái sinh kiểu Mỹ như một chứng khoán phái sinh phức hợp kiểu Âu mà giá trị của nó là:

$$\begin{aligned} V_0 &= \widetilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{j=0}^{n}(1+r)^{-j}C_j\right] \\ &= \widetilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{j=0}^{n}(1+r)^{-j}\mathbb{I}_{\{\tau=j\}}G_j\right] \\ &= \widetilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-\tau}C_\tau\right]. \end{aligned}$$

Người sở hữu chứng khoán phái sinh kiểu Mỹ có thể vay lượng tiền này ngay lập tức, nếu ông ta chọn, và đầu tư vào thị trường bằng thu hoạch $\{C_j\}_{j=0}^n$ đã nhận được. Vì thế, hướng tối ưu của ông ta là sử dụng một thời điểm dừng τ mà tối ưu $V_0^{(\tau)}$.

Bổ đề 2.6.5. $V_0^{(\tau)}$ *được tối ưu bởi thời điểm dừng:*

$$\tau^* = min\{k\ ;\ V_k = G_k\}.$$

Chứng minh. Nhớ lại định nghĩa

$$V_0 \triangleq \max_{\tau\in T_0} \widetilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-\tau}G_\tau\right] = \max_{\tau\in T_0} V_0^{(\tau)}$$

Giả sử τ' là một thời điểm dừng mà tối ưu $V_0^{(\tau)}$, tức là $V_0 = \widetilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-\tau'}G_{\tau'}\right]$. Vì $\left\{(1+r)^{-k}V_k\right\}_{k=0}^n$ là một martingale trên, từ định lý 2.5.1 và bất đẳng thức

$V_k \geq G_k$ ta có:

$$\begin{aligned} V_0 &\geq \widetilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-\tau'} V_{\tau'} | \mathcal{F}_0\right] \\ &= \widetilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-\tau'} V_{\tau'}\right] \\ &\geq \widetilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-\tau'} G_{\tau'} | \mathcal{F}_0\right] \\ &= V_0. \end{aligned}$$

Vì thế cho nên:

$$V_0 = \widetilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-\tau'} V_{\tau'}\right] = \widetilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-\tau'} G_{\tau'}\right],$$

và

$$V_{\tau'} = G_{\tau'}\ , \text{ hầu chắc chắn.}$$

Chúng ta vừa chỉ ra rằng, nếu τ' đạt tới maximum trong công thức:

$$V_0 = \max_{\tau \in T_0} \widetilde{E}\left[(1+r)^{-\tau} G_\tau\right], \tag{2.28}$$

thì

$$V_{\tau'} = G_{\tau'}\ , \text{ hầu chắc chắn.}$$

Nhưng ta đã định nghĩa

$$\tau^* = \min\{k\ ;\ V_k = G_k\},$$

và vì vậy ta cần phải có $\tau^* \leq \tau' \leq n$ hầu chắc chắn. Từ định lý 2.5.1 suy ra:

$$\begin{aligned} (1+r)^{-\tau^*} G_{\tau^*} &= (1+r)^{-\tau^*} V_{\tau^*} \\ &\geq \widetilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-\tau'} V_{\tau'} | \mathcal{F}_{\tau^*}\right] \\ &= \widetilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-\tau'} G_{\tau'} | \mathcal{F}_{\tau^*}\right]. \end{aligned}$$

Lấy kỳ vọng cả hai vế ta được:

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-\tau^*} G_{\tau^*}\right] \geq \widetilde{\mathbb{E}}\left[(1+r)^{-\tau'} G_{\tau'}\right] = V_0.$$

Điều đó suy ra rằng τ^* cũng đạt tới maximum trong (2.28) và vì thế cho nên nó là một thời điểm thực hiện tối ưu cho chứng khoán phái sinh kiểu Mỹ. □

2.7 Định lý Radon-Nikodym

2.7.1 Định lý Radon-Nikodym

Định nghĩa 2.7.1. *Giả sử $\mathbb{P}$ và $\widetilde{\mathbb{P}}$ là hai độ đo xác suất trên không gian $(\Omega, \mathcal{F})$. Ta nói rằng $\widetilde{\mathbb{P}}$ tuyệt đối liên tục đối với $\mathbb{P}$ nếu với mọi $A \in \mathcal{F}$ thoả mãn $\mathbb{P}(A) = 0$, ta cũng có $\widetilde{\mathbb{P}}(A) = 0$.*

Định lý 2.7.1. (Radon-Nikodym). *Giả sử $\widetilde{\mathbb{P}}$ tuyệt đối liên tục đối với $\mathbb{P}$. Khi đó, có một biến ngẫu nhiên không âm Z sao cho:*

$$\widetilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z d\mathbb{P}, \qquad \forall A \in \mathcal{F}, \tag{2.29}$$

và Z được gọi là đạo hàm Radon-Nikodym của $\widetilde{\mathbb{P}}$ đối với $\mathbb{P}$.

Chú ý 2.7.1. *Phương trình (2.29) suy ra điều kiện mạnh hơn*

$$\widetilde{\mathbb{E}}[X] = \mathbb{E}[XZ]$$

với mọi biến ngẫu nhiên X mà $\mathbb{E}|XZ| < \infty$.

Định nghĩa 2.7.2. *Ta nói rằng $\mathbb{P}$ và $\widetilde{\mathbb{P}}$ tương đương nếu $\widetilde{\mathbb{P}}$ tuyệt đối liên tục đối với $\mathbb{P}$ và $\mathbb{P}$ tuyệt đối liên tục đối với $\widetilde{\mathbb{P}}$. Nói cách khác, $\mathbb{P}$ và $\widetilde{\mathbb{P}}$ tương đương nếu và chỉ nếu:*

$$\mathbb{P}(A) = 0 \text{ một cách chính xác khi } \widetilde{\mathbb{P}}(A) = 0, \ \forall A \in \mathcal{F}.$$

Chú ý 2.7.2. *Nếu $\mathbb{P}$ và $\widetilde{\mathbb{P}}$ tương đương và Z là đạo hàm Radon-Nikodym của $\widetilde{\mathbb{P}}$ đối với $\mathbb{P}$ thì $\frac{1}{Z}$ là đạo hàm Radon-Nikodym của $\mathbb{P}$ đối với $\widetilde{\mathbb{P}}$, tức là:*

$$\widetilde{\mathbb{E}}[X] = \mathbb{E}[XZ], \ \forall X, \tag{2.30}$$

$$\widetilde{\mathbb{E}}[Y] = \widetilde{\mathbb{E}}[Y\frac{1}{Z}], \ \forall Y. \tag{2.31}$$

(Giả sử X và Y được liên hệ bởi phương trình $Y = XZ$, dễ nhận thấy rằng (2.30) và (2.31) là tương đương).

Ví dụ 2.7.1. Giả sử $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$ là tập của các kết cục độ dài 2 của phép tung đồng xu. Giả sử $\mathbb{P}$ biểu diễn xác suất $\frac{1}{3}$ với H và $\frac{2}{3}$ với T, và giả sử $\widetilde{\mathbb{P}}$ biểu diễn xác suất $\frac{1}{2}$ với H và $\frac{1}{2}$ với T. Khi đó $Z(\omega) = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}(\omega)}{\mathbb{P}(\omega)}$, vậy:

$$Z(HH) = \frac{9}{4}, \quad Z(HT) = \frac{9}{8}, \quad Z(TH) = \frac{9}{8}, \quad Z(TT) = \frac{9}{16}.$$

2.7.2 Martingale Radon-Nikodym

Giả sử Ω là tập của tất cả các kết cục khi tung n lần một đồng xu. $\mathbb{P}$ là độ đo xác suất thị trường và $\widetilde{\mathbb{P}}$ là độ đo xác suất trung hòa rủi ro. Giả sử:

$$\mathbb{P}(\omega) > 0, \quad \widetilde{\mathbb{P}}(\omega) > 0, \quad \forall\, \omega \in \Omega,$$

và do đó $\mathbb{P}$ và $\widetilde{\mathbb{P}}$ tương đương. Đạo hàm Radon-Nikodym của $\widetilde{\mathbb{P}}$ đối với $\mathbb{P}$ là:

$$Z(\omega) = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}(\omega)}{\mathbb{P}(\omega)}.$$

Định nghĩa P-martingale

$$Z_k = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_k], \quad k = 0, 1, ..., n. \tag{2.32}$$

Chúng ta có thể kiểm tra được Z_k thực sự là một martingale:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_{k+1}|\mathcal{F}_k] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_{k+1}]|\mathcal{F}_k] \\ &= \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_k] \\ &= Z_k \end{aligned}$$

Bổ đề 2.7.2. *Nếu X là $\mathcal{F}_k$- đo được, thì $\widetilde{\mathbb{E}}[X] = \mathbb{E}[XZ_k]$.*

Chứng minh.

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbb{E}}[X] &= \mathbb{E}[XZ] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[XZ|\mathcal{F}_k]] \\ &= \mathbb{E}[X.\mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_k]] \\ &= \mathbb{E}[XZ_k]. \end{aligned}$$

□

Chú ý rằng Bổ đề 2.7.2 suy ra rằng nếu X là $\mathcal{F}_k$-đo được, thì với bất kỳ $A \in \mathcal{F}_k$,

$$\widetilde{\mathbb{E}}[\mathbb{I}_A X] = \mathbb{E}[Z_k \mathbb{I}_A X],$$

hoặc tương đương

$$\int_A X d\widetilde{\mathbb{P}} = \int_A X Z_k d\mathbb{P}.$$

Bổ đề 2.7.3. *Nếu X là $\mathcal{F}_k$-đo được và $0 \leq j \leq k$, thì:*

$$\widetilde{\mathbb{E}}[X|\mathcal{F}_j] = \frac{1}{Z_j}\mathbb{E}[X Z_k|\mathcal{F}_j].$$

Chứng minh. Trước tiên ta nhận thấy rằng $\frac{1}{Z_j}\mathbb{E}[XZ_k|\mathcal{F}_j]$ là $\mathcal{F}_j$-đo được. Vì vậy, với bất kỳ $A \in \mathcal{F}_j$, ta có:

$$\begin{aligned}\int_A \frac{1}{Z_j}\mathbb{E}[XZ_k|\mathcal{F}_j]d\widetilde{\mathbb{P}} &= \int_A \frac{1}{Z_j}\mathbb{E}[XZ_k|\mathcal{F}_j]d\mathbb{P} \quad \text{(bổ đề 2.7.2)} \\ &= \int_A XZ_k d\mathbb{P} \quad \text{(Trung bình riêng)} \\ &= \int_A d\widetilde{\mathbb{P}} \quad \text{(bổ đề 2.7.2)}.\end{aligned}$$

□

Ví dụ 2.7.2. (Định lý Radon-Nikodym). Hình 2.6 chỉ ra các giá trị của martingale Z_k. Ta luôn có $Z_0 = 1$, vì:

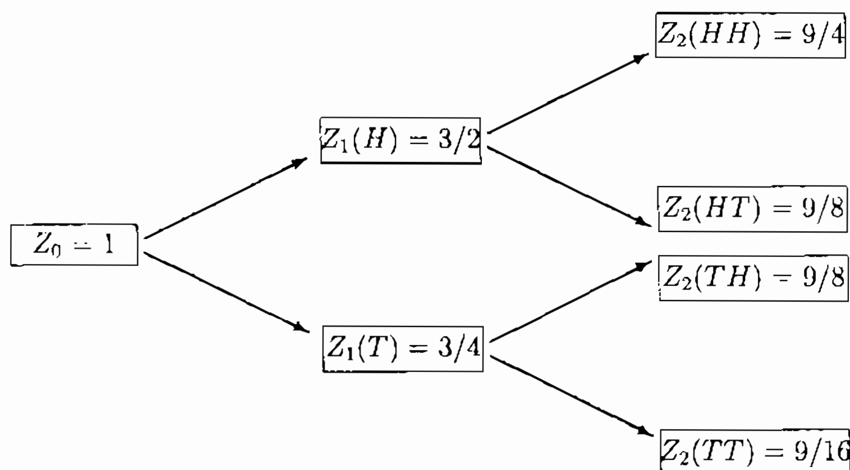
$$Z_0 = \mathbb{E}[Z] = \int_\Omega Z d\mathbb{P} = \widetilde{\mathbb{P}}(\Omega) = 1.$$

2.7.3 Quá trình mật độ trạng thái giá

Nhằm xác định giá trị của một chứng khoán phái sinh theo các đại lượng của thị trường có tính xác suất, ta xây dựng quá trình mật độ trạng thái giá sau:

$$\zeta_k = (1+r)^{-k} Z_k, \quad k = 0, \ldots, n,$$

trong đó Z_k xác định bởi (2.32). Ta có các công thức định giá sau:



Hình 2.6: Chỉ ra giá trị Z_k trong mô hình nhị phân 2 thời kỳ $u = \frac{1}{3}, d = \frac{2}{3}$. Xác suất chỉ ra là $\widetilde{\mathbb{P}}$, không phải $\mathbb{P}$.

Với một chứng khoán phái sinh đơn giản kiểu Âu, thu hoạch C_k tại thời điểm k :

$$\begin{aligned} V_0 &= \widetilde{\mathbb{E}}[(1+r)^{-k}C_k] \\ &= \mathbb{E}[(1+r)^{-k}Z_kC_k] \quad \text{(bổ đề 2.7.2)} \\ &= \mathbb{E}[\zeta_k C_k]. \end{aligned}$$

Tổng quát hơn nữa, với $0 \le j \le k$,

$$\begin{aligned} V_j &= (1+r)^j\widetilde{\mathbb{E}}[(1+r)^{-k}C_k|\mathcal{F}_j] \\ &= \frac{(1+r)^j}{Z_j}\mathbb{E}[(1+r)^{-k}Z_kC_k|\mathcal{F}_j] \quad \text{(bổ đề 2.7.3)} \\ &= \frac{1}{\zeta_j}\mathbb{E}[\zeta_k C_k|\mathcal{F}_j]. \end{aligned}$$

Chú ý 2.7.3. *$\{\zeta_j V_j\}_{j=0}^k$ là một martingale dưới độ đo $\mathbb{P}$.*

Thật vậy, ta có thể kiểm tra như sau:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\zeta_{j+1}V_{j+1}|\mathcal{F}_j] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\zeta_k C_k|\mathcal{F}_{j+1}]|\mathcal{F}_j]\\ &= \mathbb{E}[\zeta_k C_k|\mathcal{F}_j]\\ &= \zeta_j V_j.\end{aligned}$$

Bây giờ với một chứng khoán phái sinh kiểu Mỹ $\{G_k\}_{k=0}^n$:

$$\begin{aligned}V_0 &= \sup_{\tau\in T_0}\widetilde{\mathbb{E}}[(1+r)^{-\tau}G_\tau]\\ &= \sup_{\tau\in T_0}\mathbb{E}[(1+r)^{-\tau}Z_\tau G_\tau]\\ &= \sup_{\tau\in T_0}\mathbb{E}[\zeta_\tau G_\tau].\end{aligned}$$

Tổng quá hơn nữa, với $0\le j\le n$,

$$\begin{aligned}V_j &= (1+r)^j\sup_{\tau\in T_j}\widetilde{\mathbb{E}}[(1+r)^{-\tau}G_\tau|\mathcal{F}_j]\\ &= (1+r)^j\sup_{\tau\in T_j}\frac{1}{Z_j}\mathbb{E}[(1+r)^{-\tau}Z_\tau G_\tau|\mathcal{F}_j]\\ &= \frac{1}{\zeta_j}\sup_{\tau\in T_j}\mathbb{E}[\zeta_\tau G_\tau|\mathcal{F}_j].\end{aligned}$$

Chú ý 2.7.4. *Nhận thấy rằng:*

(a) $\{\zeta_j V_j\}_{j=0}^n$ *là một martingale trên dưới độ đo* $\mathbb{P}$,

(b) $\zeta_j V_j \ge \zeta_j G_j \quad \forall j$,

(c) $\{\zeta_j V_j\}_{j=0}^n$ *là quá trình nhỏ nhất có các tính chất (a) và (b).*

Ta hình dung ζ_k bằng cách quan sát rằng $\zeta_k(\omega)\mathbb{P}(\omega)$ là giá trị tại thời điểm không của hợp đồng mà trả 1 USD tại thời điểm k nếu ω xảy ra.

Ví dụ 2.7.3. (Định lý Radon-Nikodym). Ta minh họa việc sử dụng các công thức định giá cho chứng khoán phái sinh kiểu Âu và kiểu Mỹ trong các đại lượng của thị trường. Nhắc lại rằng $p=\dfrac{1}{3}, q=\dfrac{2}{3}$. Giá trị trạng thái giá ζ_k được chỉ ra trong hình 2.7.

Xét một quyền chọn mua kiểu Âu với giá thưc thi 5, thời gian đáo hạn 2, ta có:

$$V_2(HH) = 11; \zeta_2(HH)V_2(HH) = 1,44 \times 11 = 15,84;$$

$$V_2(HT) = V_2(TH) = V_2(TT) = 0.$$

$$V_0 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 15.84 = 1,76;$$

$$\frac{\zeta_2(HH)}{\zeta_1(HH)} V_2(HH) = \frac{1,44}{1,20} \times 11 = 1,20 \times 11 = 13,20;$$

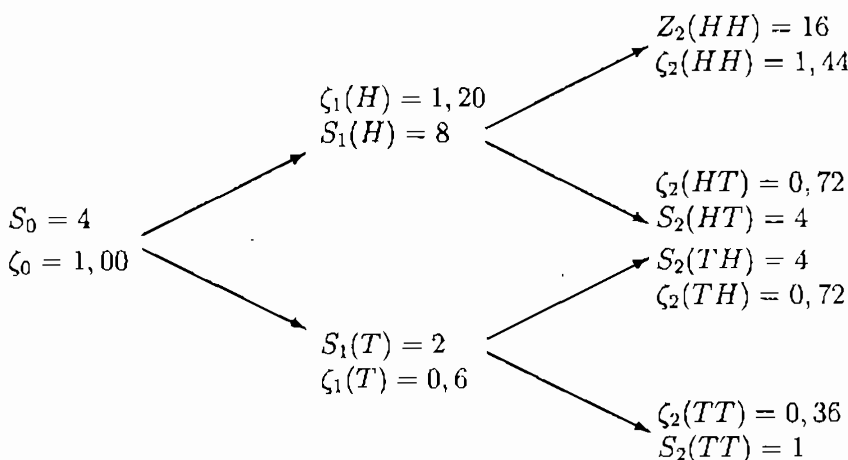
$$V_1(H) = \frac{1}{3} \times 13,20 = 4,40.$$

So sánh với công thức định giá trung hòa rủi ro:

$$V_1(H) = \frac{2}{5} V_1(HH) + \frac{2}{5} V_1(HT) = \frac{2}{5} \times 11 = 4,40;$$

$$V_1(T) = \frac{2}{5} V_1(TH) + \frac{2}{5} V_1(TT) = 0;$$

$$V_0 = \frac{2}{5} V_1(H) + \frac{2}{5} V_1(T) = \ 25 \times 4,40 = 1,76.$$



Hình 2.7: Chỉ ra giá trị trạng thái $\zeta_k, u = \frac{1}{3}, d = \frac{2}{3}$. Xác suất chỉ ra là $\widetilde{\mathbb{P}}$, không phải $\mathbb{P}$.

Bây giờ xét một quyền chọn bán kiểu Mỹ với giá thực thi 5 và thời gian đáo hạn 2. Hình 2.8 chỉ ra giá trị của $\zeta_k(5 - S_k)^+$. Ta tính giá trị của quyền chọn bán dưới các thời điểm dừng khác nhau:

(0) Dừng trực tiếp: giá trị là 1.

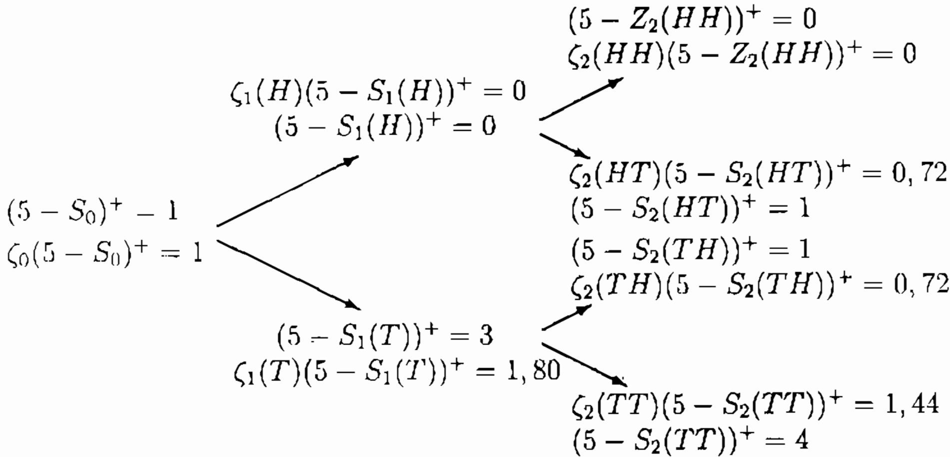
(1) Nếu $\tau(HH) = \tau(HT) = 2, \tau(TH) = \tau(TT) = 1$, giá trị là

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times 0,72 + \frac{2}{3} \times 1,80 = 1,36.$$

(2) Nếu ta dừng tại thời điểm 2, giá trị là

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times 0,72 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 0,72 + \frac{2}{3}\frac{2}{3} \times 1,44 = 0,96.$$

Ta nhận thấy rằng (1) là thời điểm dừng tối ưu.



Hình 2.8: Chỉ ra giá trị $\zeta_k(5 - S_k)^+$ cho một quyền chọn bán kiểu Mỹ, $u = \frac{1}{3}$, $d = \frac{2}{3}$. Xác suất chỉ ra là $\widetilde{\mathbb{P}}$, không phải $\mathbb{P}$.

2.7.4 Độ biến động ngẫu nhiên trong mô hình nhị phân

Giả sử Ω là tập các kết cục của n lần tung một đồng xu và $0 < d_k < 1 + r_k < u_k$, ở đó với mỗi k, d_k, u_k, r_k là $\mathcal{F}_k$-đo được. Đặt

$$\widetilde{p} = \frac{1 + r_k - d_k}{u_k - d_k}, \quad \widetilde{q} = \frac{u_k - (1 + r_k)}{u_k - d_k}.$$

Giả sử $\widetilde{\mathbb{P}}$ là độ đo xác suất trung hòa rủi ro:

$$\widetilde{\mathbb{P}}(\omega_1 = H) = \widetilde{p}_0,$$
$$\widetilde{\mathbb{P}}(\omega_1 = T) = \widetilde{q}_0,$$

và với $2 \le k \le n$,

$$\widetilde{\mathbb{P}}(\omega_{k+1} = H|\mathcal{F}_k) = \widetilde{p}_k,$$
$$\widetilde{\mathbb{P}}(\omega_{k+1} = T|\mathcal{F}_k) = \widetilde{q}_k.$$

Giả sử $\mathbb{P}$ là độ đo xác suất thị trường, và giả sử $\mathbb{P}(\omega) > 0,\ \forall \omega \in \Omega$. Khi đó $\mathbb{P}$ và $\widetilde{\mathbb{P}}$ là tương đương. Định nghĩa

$$Z(\omega) = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}(\omega)}{\mathbb{P}(\omega)}\ \forall \omega \in \Omega,$$

$$Z_k = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_k], \quad k = 0, 1, ..., n.$$

Ta định nghĩa quá trình giá thị trường như sau:

$$M_0 = 1,$$
$$M_k = (1 + r_{k-1})M_{k-1}, \quad k = 1, ..., n.$$

Nhận thấy rằng M_k là $\mathcal{F}_{k-1}$-đo được.

Ta định nghĩa quá trình giá trạng thái là:

$$\zeta_k = \frac{1}{M_k} Z_k, \quad k = 0, 1, ..., n.$$

Quá trình danh mục đầu tư $\{\Delta_k\}_{k=0}^{n-1}$. Quá trình giá trị tự điều chỉnh tài chính (quá trình tài sản) gồm có X_0, tài sản ban đầu không ngẫu nhiên, và

$$X_{k+1} = \Delta_k S_{k+1} + (1 + r_k)(X_k - \Delta_k S_k), \quad k = 0, ..., n - 1.$$

Khi đó các quá trình sau là martingale dưới độ đo $\widetilde{\mathbb{P}}$:

$$\left\{\frac{1}{M_k}S_k\right\}_{k=0}^{n} \quad \text{và} \quad \left\{\frac{1}{M_k}X_k\right\}_{k=0}^{n},$$

và các quá trình sau là martingale dưới độ đo $\mathbb{P}$:

$$\{\zeta_k S_k\}_{k=0}^{n} \quad \text{và} \quad \{\zeta_k X_k\}_{k=0}^{n}.$$

Vì thế ta có công thức định giá sau:

Chứng khoán phái sinh kiểu Âu đơn giản với thu hoạch C_k tại thời điểm k :

$$\begin{aligned} V_j &= M_j \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{C_k}{M_k}\middle|\mathcal{F}_j\right] \\ &= \frac{1}{\zeta_j}\mathbb{E}[\zeta_k C_k|\mathcal{F}_j]. \end{aligned}$$

Chứng khoán phái sinh kiểu Mỹ $\{G_k\}_{k=0}^{n}$:

$$\begin{aligned} V_j &= M_j \sup_{\tau\in T_j} \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{G_\tau}{M_\tau}\middle|\mathcal{F}_j\right] \\ &= \frac{1}{\zeta_j}\sup_{\tau\in T_j}\mathbb{E}[\zeta_\tau G_\tau|\mathcal{F}_j]. \end{aligned}$$

Các công thức phòng hộ danh mục đầu tư thường dùng vẫn còn đúng.

2.7.5 Một ứng dụng khác của định lý Radon-Nikodym

Cho $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ là một không gian xác suất. Giả sử $\mathcal{G}$ là một σ-đại số con của $\mathcal{F}$, và giả sử X là một biến ngẫu nhiên không âm với $\int_\Omega X d\mathbb{Q} = 1$. Ta cấu trúc kỳ vọng điều kiện (dưới $\mathbb{Q}$) của X đối với $\mathcal{G}$.

Trên $\mathcal{G}$, định nghĩa hai độ đo xác suất:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{Q}(A) \quad \forall A \in \mathcal{G} \\ \widetilde{\mathbb{P}}(A) &= \int_A X d\mathbb{Q} \quad \forall A \in \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Khi Y là một biến ngẫu nhiên $\mathcal{G}$-đo được, ta có:

$$\int_\Omega Y d\mathbb{P} = \int_\Omega Y d\mathbb{Q};$$

nếu $Y = \mathbb{I}_A$ với $A \in \mathcal{G}$ nào đó. Nếu $A \in \mathcal{G}$ và $\mathbb{P}(A) = 0$, thì $\mathbb{Q}(A) = 0$, vậy $\widetilde{\mathbb{P}}(A) = 0$. Nói cách khác, độ đo $\widetilde{\mathbb{P}}$ tuyệt đối liên tục đối với độ đo $\mathbb{P}$. Định lý Radon-Nikodym suy ra rằng tồn tại một biến ngẫu nhiên $\mathcal{G}$-đo được Z sao cho

$$\widetilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z d\mathbb{P}, \quad \forall A \in \mathcal{G},$$

tức là

$$\int_A X d\mathbb{Q} = \int_A Z d\mathbb{P} \quad \forall A \in \mathcal{G}.$$

Điều này chứng tỏ rằng Z có tính chất "trung bình riêng", và vì Z là $\mathcal{G}$-đo được, nó là kỳ vọng điều kiện (dưới độ đo xác suất $\mathbb{Q}$) của X với $\mathcal{G}$. Sự tồn tại của kỳ vọng điều kiện là một hệ quả của định lý Radon-Nikodym.

BÀI TẬP

Bài tập 2.1. Một cổ phiếu có giá hiện tại là 40 USD. Biết rằng vào thời điểm cuối tháng này nó sẽ có giá là 42 USD hoặc 38 USD. Lãi suất phi rủi ro là 8%/năm được tính theo lãi gộp liên tục. Tính giá trị của một quyền chọn mua kiểu Âu với thời hạn 1 tháng và giá thực hiện là 39 USD.

Bài tập 2.2. Một cổ phiếu có giá hiện tại là 50 USD. Biết rằng vào thời điểm cuối của 6 tháng tới nó sẽ có giá là 44 USD hoặc 55 USD. Lãi suất phi rủi ro là 10%/năm được tính theo lãi gộp liên tục. Tính giá trị của một quyền chọn bán kiểu Âu với thời hạn 6 tháng và giá thực hiện là 50 USD.

Bài tập 2.3. Một cổ phiếu có giá hiện tại là 100 USD. Mỗi 6 tháng sau nó được kỳ vọng sẽ tăng 10% hoặc giảm 10%. Lãi suất phi rủi ro là 8%/năm được tính theo lãi gộp liên tục. Tính giá trị của một quyền chọn mua kiểu Âu với thời hạn 1 năm và giá thực hiện là 100 USD.

Bài tập 2.4. Với giả thiết như bài tập (2.3), tính giá trị của một quyền chọn bán kiểu Âu với thời hạn 1 năm và giá thực hiện là 100 USD.

Bài tập 2.5. Một cổ phiếu có giá hiện tại là 50 USD. Biết rằng vào thời điểm cuối của 2 tháng tới nó sẽ có giá là 53 USD hoặc 48 USD. Lãi suất phi rủi ro là 10%/năm được tính theo lãi gộp liên tục. Sử dụng nguyên lý không cơ lợi hãy tính giá trị của một quyền chọn mua kiểu Âu với thời hạn 2 tháng và giá thực hiện là 49 USD.

Bài tập 2.6. Một cổ phiếu có giá hiện tại là 50 USD. Mỗi 3 tháng sau nó được kỳ vọng sẽ tăng 6% hoặc giảm 5%. Lãi suất phi rủi ro là 5%/năm được tính theo lãi gộp liên tục. Tính giá trị của một quyền chọn mua kiểu Âu với thời hạn 6 tháng và giá thực hiện là 51 USD.

Bài tập 2.7. Một cổ phiếu có giá hiện tại là 40 USD. Mỗi 3 tháng sau nó được kỳ vọng sẽ tăng 10% hoặc giảm 10%. Lãi suất phi rủi ro là 12%/năm được tính theo lãi gộp liên tục.

a) Tính giá trị của một quyền chọn mua kiểu Âu với thời hạn 6 tháng và giá thực hiện là 42 USD.

b) Tính giá trị của một quyền chọn bán kiểu Âu với thời hạn 6 tháng và giá thực hiện là 42 USD.

Bài tập 2.8. Một cổ phiếu có giá hiện tại là 25 USD. Biết rằng vào cuối 2 tháng sau nó sẽ có giá là 23 USD hoặc 27 USD. Lãi suất phi rủi ro là 10%/năm được tính theo lãi gộp liên tục. Giả sử rằng S_T là giá cổ phiếu tại thời điểm cuối của 2 tháng sau. Tính giá trị của một chứng khoán phái sinh mà trả S_T^2 tại thời điểm này.

Bài tập 2.9. Xét mô hình nhị phân với 2 tài sản, giá hợp đồng $K = 3$, lãi suất $r = 0$ và quá trình giá như sau:

n	$S_n(0)$	$S_n(1)(\omega_1)$	$S_n(1)(\omega_2)$	$S_n(1)(\omega_3)$
1	4	8	6	3
2	7	10	8	4

Chỉ ra rằng tồn tại một chiến lược đầu tư trội và thỏa mãn luật một giá.

Bài tập 2.10. Xét mô hình nhị phân với 2 tài sản, giá hợp đồng $K = 4$, lãi suất $r = 1/9$ và quá trình giá như sau:

n	$S_n(0)$	$S_n(1)(\omega_1)$	$S_n(1)(\omega_2)$	$S_n(1)(\omega_3)$	$S_n(1)(\omega_4)$
1	5	60/9	60/9	40/9	20/9
2	10	40/3	80/9	80/9	120/9

a) Xác định quá trình giá đã chiết khấu

b) Chỉ ra rằng tồn tại một chiến lược đầu tư trội nhưng có cơ hội cơ lợi.

Bài tập 2.11. Gọi $W = \{X \in \mathbb{R}^K : X =$ danh mục lợi nhuận đã chiết khấu ứng với một chiens lược đầu tư nào đó$\}$. Chứng minh rằng W và W^K là các không gian tuyến tính con của $\mathbb{R}^K$.

Bài tập 2.12. Chỉ ra các tập W và W^T trong bài tập (2.10)

Bài tập 2.13. Giả sử $K = 2$, $N = 1$ và lãi suất là một tham số $r \geq 0$. Giả sử $S_0 = 1$, $S_1(\omega_1) = u$ (up) và $S_1(\omega_2) = d$ (down) với $u > d > 0$. Với giá trị nào của r, u, d thì tồn tai một độ đo xác suất trung hòa rủi ro không? Có thể nói gì về độ đo này? Với các giá trị còn lại của các tham số có tồn tai cơ hội cơ lợi không?

Chương 3

Mô hình nửa liên tục và chuyển động Brown

Chương này gồm các vấn đề sau:

- Mô hình nửa liên tục.
- Quá trình ngẫu nhiên với thời gian liên tục.
- Chuyển động Brown.

3.1 Mô hình nửa liên tục

3.1.1 Chuyển động Brown với thời gian rời rạc

Cho $\{Y_j\}_{j=1}^{n}$ là một họ của các biến ngẫu nhiên chuẩn $\mathcal{N}(0;1)$, độc lập xác định trên không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, ở đó $\mathbb{P}$ là độ đo thị trường. Ký hiệu $Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)^T$; khi đó với bất kỳ véc tơ (thực) $u = (u_1, u_2, ..., u_n)^T$, ta có:

$$\mathbb{E}[e^{u^T.Y}] \triangleq \mathbb{E}\left[\exp\left\{\sum_{j=1}^{n} u_j Y_j\right\}\right] = \exp\left\{\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2} u_j^2\right\}.$$

Ta định nghĩa:

$$B_0 = 0,$$
$$B_k = \sum_{j=1}^{k} Y_j, \quad k = 1, ..., n.$$

Quá trình ngẫu nhiên $\{B_k\}_{k=1}^n$ được gọi là một chuyển động Brown rời rạc (xem hình 3.1). Rõ ràng, nếu ta biết $Y_1, Y_2, ..., Y_k$, thì ta biết $B_1, B_2, ..., B_k$ và ngược lại, nếu ta biết $B_1, B_2, ..., B_k$, thì ta biết $Y_1 = B_1, Y_2 = B_2 - B_1, ...,$ $Y_k = B_k - B_{k-1}$. Ta xây dựng một bộ lọc:

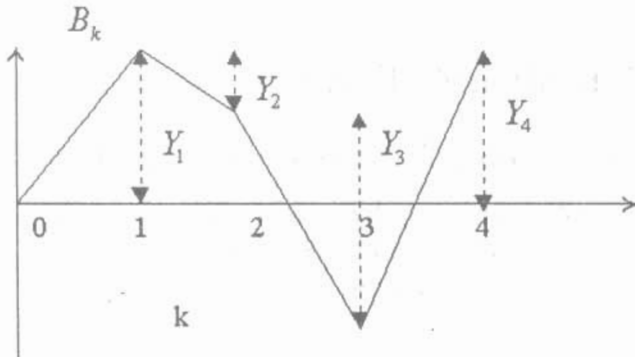
$$\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\},$$
$$\mathcal{F}_k = \sigma(Y_1, Y_2, ..., Y_k) = \sigma(B_1, B_2, ..., B_k), k = 1, ..., n.$$

Định lý 3.1.1. *$\{B_k\}_{k=0}^n$ là một martingale.*

Chứng minh. Dễ thấy $\{B_k\}_{k=0}^n$ là một quá trình thích nghi với bộ lọc $\{\mathcal{F}_k\}_{k=0}^n$. Với mỗi $k = 0, 1, ..., n-1$, ta có:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big[B_{k+1}|\mathcal{F}_k\Big] &= \mathbb{E}\Big[Y_{k+1} + B_k\Big|\mathcal{F}_k\Big] \\ &= \mathbb{E}[Y_{k+1}] + B_k \\ &= B_k. \end{aligned}$$

Vậy $\{B_k\}_{k=0}^n$ là một martingale. □



Hình 3.1: Chuyển động Brown với thời gian rời rạc.

Định lý 3.1.2. *$\{B_k\}_{k=0}^n$ là một quá trình Markov.*

Chứng minh. Nhận thấy rằng:

$$\mathbb{E}\left[h(B_{k+1})\Big|\mathcal{F}_k\right] = \mathbb{E}\left[h(Y_{k+1} + B_k)\Big|\mathcal{F}_k\right].$$

Sử dụng bổ đề 2.4.1, ta định nghĩa

$$g(b) = \mathbb{E}\left[h(Y_{k+1} + b)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(y+b)e^{-\frac{1}{2}y^2}dy.$$

Khi đó

$$\mathbb{E}\left[h(Y_{k+1} + B_k)\Big|\mathcal{F}_k\right] = g(B_k)$$

là một hàm của B_k. Vậy $\{B_k\}_{k=0}^{n}$ là một quá trình Markov. □

3.1.2 Mô hình thị trường với thời gian rời rạc

Cho không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Giả sử $\{B_k\}_{k=0}^{n}$ là một chuyển động Brown với thời gian rời rạc. Ta ký hiệu:

- $\mu \in \mathbb{R}$, là lợi suất trung bình của chứng khoán.
- $\sigma > 0$, là độ biến động giá chứng khoán.
- $S_0 > 0$, là giá chứng khoán gốc.

Quá trình giá chứng khoán (xem chương 5 cho trường hợp tổng quát) được cho bởi:

$$S_k = S_0 \exp\left\{\sigma B_k + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)k\right\}, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{3.1}$$

Nhận thấy rằng:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k \exp\left\{\sigma Y_{k+1} + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right\} && (3.2)\\ \mathbb{E}\left[S_{k+1}|\mathcal{F}_k\right] &= S_k\mathbb{E}\left[e^{\sigma Y_{k+1}}|\mathcal{F}_k\right].e^{\mu - \frac{1}{2}\sigma^2} \\ &= S_k e^{\frac{1}{2}\sigma^2} e^{\mu - \frac{1}{2}\sigma^2} \\ &= e^{\mu} S_k. \end{aligned}$$

Do đó:

$$\mu = \log\frac{\mathbb{E}\left[S_{k+1}|\mathcal{F}_k\right]}{S_k} = \log\mathbb{E}\left[\frac{S_{k+1}}{S_k}\Big|\mathcal{F}_k\right] \tag{3.3}$$

và

$$\mathrm{Var}\left[\log\frac{S_{k+1}}{S_k}\right] = \mathrm{Var}\left[\sigma Y_{k+1} + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right] = \sigma^2. \tag{3.4}$$

Các quá trình khác trong mô hình thị trường này xác định như sau:

Quá trình tiền tệ trong thị trường:

$$M_k = e^{rk}, \quad k = 0, 1, ..., n.$$

trong đó r là lãi suất.

Quá trình danh mục đầu tư:

- $\Delta_0, \Delta_1, ..., \Delta_{n-1}$,
- Mỗi Δ_k là $\mathcal{F}_k$-đo được.

Quá trình tài sản:

- X_0 đã cho, không ngẫu nhiên,

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= \Delta_k S_{k+1} + e^r(X_k - \Delta_k S_k) \\ &= \Delta_k(S_{k+1} - e^r S_k) + e^r X_k. \end{aligned}$$

- Mỗi X_k là $\mathcal{F}_k$-đo được.

Quá trình tài sản đã chiết khấu:

$$\frac{X_{k+1}}{M_{k+1}} = \Delta_k\left(\frac{S_{k+1}}{M_{k+1}} - \frac{S_k}{M_k}\right) + \frac{X_k}{M_k}. \tag{3.5}$$

3.1.3 Độ đo xác suất trung hòa rủi ro

Định nghĩa 3.1.1. *Giả sử $\widetilde{\mathbb{P}}$ là một độ đo xác suất trên $(\Omega, \mathcal{F})$, tương đương với độ đo thị trường $\mathbb{P}$. Ta nói rằng $\widetilde{\mathbb{P}}$ là một độ đo trung hòa rủi ro nếu $\left\{\frac{S_k}{M_k}\right\}_{k=0}^{n}$ là một martingale dưới độ đo $\widetilde{\mathbb{P}}$.*

Định lý 3.1.3. *Nếu $\widetilde{\mathbb{P}}$ là một độ đo trung hòa rủi ro, thì mọi quá trình tài sản đã chiết khấu $\left\{\frac{X_k}{M_k}\right\}_{k=0}^{n}$ là martingale dưới $\widetilde{\mathbb{P}}$, không phụ thuộc vào quá trình danh mục đầu tư sinh ra nó.*

Chứng minh. Từ (3.5), dễ thấy $\left\{\frac{X_k}{M_k}\right\}_{k=0}^{n}$ là một quá trình thích nghi với bộ lọc $\{\mathcal{F}_k\}_{k=0}^{n}$. Với mỗi $k = 0, 1, ..., n-1$, ta có:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{X_{k+1}}{M_{k+1}}\Big|\mathcal{F}_k\right] &= \widetilde{\mathbb{E}}\left[\Delta_k\left(\frac{S_{k+1}}{M_{k+1}} - \frac{S_k}{M_k}\right) + \frac{X_k}{M_k}\Big|\mathcal{F}_k\right] \\
&= \Delta_k\left(\widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{S_{k+1}}{M_{k+1}}\Big|\mathcal{F}_k\right] - \frac{S_k}{M_k}\right) + \frac{X_k}{M_k} \\
&= \frac{X_k}{M_k}.
\end{aligned}$$

Vậy quá trình $\left\{\frac{X_k}{M_k}\right\}_{k=0}^{n}$ là một martingale dưới độ đo $\widetilde{\mathbb{P}}$. □

Trở lại mô hình thị trường đã xét ở trên, giả sử V_n là thu hoạch tại thời điểm n, V_n là $\mathcal{F}_n$-đo được (chú ý rằng V_n có thể có quỹ đạo độc lập). Ta phòng hộ cho một đoản vị như sau:

- Bán một chứng khoán phái sinh đơn giản kiểu Âu V_n.
- Nhận X_0 tại thời điểm 0.
- Cấu trúc một quá trình danh mục đầu tư $\Delta_0, ..., \Delta_{n-1}$ mà bắt đầu với X_0 và kết thúc với $X_n = V_n$.
- Nếu có một độ đo trung hòa rủi ro $\widetilde{\mathbb{P}}$, thì:

$$X_0 = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{X_n}{M_n}\right] = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{V_n}{M_n}\right].$$

Chú ý 3.1.1. *Ta thường không thể phòng hộ trong mô hình "nửa liên tục" vì không có đủ ngày giao dịch. Khó khăn này sẽ không xuất hiện khi chúng ta xét mô hình liên tục đầy đủ.*

3.1.4 Arbitrage

Định nghĩa 3.1.2. *Một Arbitrage là một danh mục đầu tư mà bắt đầu với $X_0 = 0$ và kết thúc với X_n thoả mãn:*

$$\mathbb{P}(X_n \geq 0) = 1, \ \mathbb{P}(X_n > 0) > 0.$$

($\mathbb{P}$ ở đây là độ đo thị trường).

Định lý 3.1.4. (Định lý cơ bản của định giá tài sản). *Nếu trong thị trường có một độ đo trung hòa rủi ro thì không có Arbitrage.*

Chứng minh. Giả sử $\widetilde{\mathbb{P}}$ là một độ đo trung hòa rủi ro, $X_0 = 0$, và giả sử X_n biểu diễn giá tài sản cuối cùng ứng với một danh mục đầu tư nào đó. Vì $\left\{\frac{X_k}{M_k}\right\}_{k=0}^{n}$ là một martingale đối với độ đo $\widetilde{\mathbb{P}}$ nên ta có:

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{X_n}{M_n}\right] = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{X_0}{M_0}\right] = 0. \tag{3.6}$$

Giả sử $\mathbb{P}(X_n \geq 0) = 1$. Ta có

$$\mathbb{P}(X_n < 0) = 0 \Longrightarrow \widetilde{\mathbb{P}}(X_n < 0) = 0 \Longrightarrow \widetilde{\mathbb{P}}(X_n \geq 0) = 1. \tag{3.7}$$

Từ (3.6) và (3.7) suy ra $\widetilde{\mathbb{P}}(X_n = 0) = 1$. Suy ra

$$\widetilde{\mathbb{P}}(X_n > 0) = 0 \Longrightarrow \mathbb{P}(X_n > 0) = 0.$$

Điều này chứng tỏ thị trường không có Arbitrage. □

Vấn đề đặt ra là có tồn tại một độ đo trung hòa rủi ro trong mô hình thị trường "nửa liên tục" của ta hay không?

Từ các công thức (3.1), (3.2), với mỗi $k = 0, 1, ..., n-1$, ta có:

$$\frac{S_{k+1}}{M_{k+1}} = \frac{S_k}{M_k}\exp\left\{\sigma Y_{k+1} + \left(\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right\}. \tag{3.8}$$

Do đó:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{S_{k+1}}{M_{k+1}}\Big|\mathcal{F}_k\right] &= \frac{S_k}{M_k} \times \mathbb{E}\left[\exp\{\sigma Y_{k+1}\}\Big|\mathcal{F}_k\right] \times \exp\left\{\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2\right\} \\
&= \frac{S_k}{M_k}\exp\left\{\frac{1}{2}\sigma^2\right\} \times \exp\left\{\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2\right\} \\
&= e^{\mu - r} \times \frac{S_k}{M_k}.
\end{aligned}$$

Nếu $\mu = r$, độ đo thị trường là độ đo trung hòa rủi ro cần tìm.

Nếu $\mu \neq r$, ta viết lại công thức (3.8) dưới dạng:

$$\begin{aligned}\frac{S_{k+1}}{M_{k+1}} &= \frac{S_k}{M_k}\exp\left\{\sigma Y_{k+1} + \left(\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right\}\\ &= \frac{S_k}{M_k}\exp\left\{\sigma\left(Y_{k+1} + \frac{\mu - r}{\sigma}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2\right\}\\ &= \frac{S_k}{M_k}\exp\left\{\sigma\bar{Y}_{k+1} - \frac{1}{2}\sigma^2\right\},\end{aligned}$$

trong đó

$$\bar{Y}_{k+1} = Y_{k+1} + \frac{\mu - r}{\sigma}.$$

Ta ký hiệu $\theta = \dfrac{\mu - r}{\sigma}$ và gọi là *giá rủi ro của thị trường.*

Bây giờ ta đi tìm một độ đo xác suất $\widetilde{\mathbb{P}}$ sao cho $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, ..., \bar{Y}_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập, chuẩn hóa và

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{S_{k+1}}{M_{k+1}}\middle|\mathcal{F}_k\right] &= \frac{S_k}{M_k} \times \widetilde{\mathbb{E}}\left[\exp\left\{\sigma\bar{Y}_{k+1}\right\}\middle|\mathcal{F}_k\right] \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2\right\}\\ &= \frac{S_k}{M_k} \times \exp\left\{\frac{1}{2}\sigma^2\right\} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2\right\}\\ &= \frac{S_k}{M_k}.\end{aligned}$$

Ý tưởng của Cameron-Martin-Girsanov: Xác định một biến ngẫu nhiên:

$$Z = \exp\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(-\theta Y_j - \frac{1}{2}\theta^2\right)\right\}$$

có các tính chất sau:

- $Z \geq 0.$
- $$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z] &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}(-\theta Y_j)\right\} \times \exp\left\{-\frac{n}{2}\theta^2\right\}\right]\\ &= \exp\left\{\frac{n}{2}\theta^2\right\} \times \exp\left\{-\frac{n}{2}\theta^2\right\} = 1.\end{aligned}$$

Định nghĩa

$$\widetilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z d\mathbb{P} \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Khi đó $\widetilde{\mathbb{P}}(A) \geq 0$ với mọi $A \in \mathcal{F}$ và

$$\widetilde{\mathbb{P}}(\Omega) = \mathbb{E}[Z] = 1.$$

Từ đó suy ra $\widetilde{\mathbb{P}}$ là một độ đo xác suất.

Chúng ta sẽ chỉ ra rằng $\widetilde{\mathbb{P}}$ là độ đo trung hòa rủi ro. Để làm điều này, chúng ta chỉ cần chỉ ra rằng các biến ngẫu nhiên

$$\bar{Y}_1 = Y_1 + \theta, ..., \bar{Y}_n = Y_n + \theta$$

độc lập, chuẩn hóa đối với độ đo $\widetilde{\mathbb{P}}$.

Thật vậy từ định nghĩa của $\bar{Y}_k, k = 1, ..., n$ và Z ta có:

- $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập, chuẩn hóa dưới độ đo $\mathbb{P}$ và

$$\mathbb{E}\left\{\exp\left(\sum_{j=1}^{n} u_j Y_j\right)\right\} = \exp\left\{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} u_j^2\right\}.$$

- $\widetilde{\mathbb{E}}[X] = \mathbb{E}[XZ]$ với mọi biến ngẫu nhiên X.

- Hàm sinh moment của $(\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, ..., \bar{Y}_n)$ dưới độ đo $\widetilde{\mathbb{P}}$:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathbb{E}}\left[\exp\left\{\sum_{j=1}^{n} u_j \bar{Y}_j\right\}\right] \\
= \ &\mathbb{E}\left[\exp\left\{\sum_{j=1}^{n} u_j(Y_j + \theta) + \sum_{j=1}^{n}\left(-\theta Y_j - \frac{1}{2}\theta^2\right)\right\}\right] \\
= \ &\mathbb{E}\left[\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}(u_j - \theta)Y_j\right\} \times \exp\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(u_j\theta - \frac{1}{2}\theta^2\right)\right\}\right] \\
= \ &\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}(u_j - \theta)^2\right\} \times \exp\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(u_j\theta - \frac{1}{2}\theta^2\right)\right\} \\
= \ &\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{2}u_j^2 - u_j\theta + \frac{1}{2}\theta^2\right) + \left(u_j\theta - \frac{1}{2}\theta^2\right)\right]\right\} \\
= \ &\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}u_j^2\right\}.
\end{aligned}$$

Vậy $\tilde{Y}_1 = Y_1 + \theta, ..., \tilde{Y}_n = Y_n + \theta$ là các biến ngẫu nhiên độc lập, chuẩn hóa đối với độ đo $\widetilde{\mathbb{P}}$.

Ví dụ 3.1.1. (Định giá quyền chọn mua kiểu Âu). Xét một mô hình thị trường nửa liên tục. Giá cổ phiếu tại thời điểm n là:

$$\begin{aligned}
S_n &= S_0 \exp\left\{\sigma B_n + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)n\right\} \\
&= S_0 \exp\left\{\sigma \sum_{j=1}^{n} Y_j + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)n\right\} \\
&= S_0 \exp\left\{\sigma \sum_{j=1}^{n} \left(Y_j + \frac{\mu - r}{\sigma}\right) - (\mu - r)n + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)n\right\} \\
&= S_0 \exp\left\{\sigma \sum_{j=1}^{n} \tilde{Y}_j + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)n\right\}.
\end{aligned}$$

Thu hoạch tại thời điểm n là $(S_n - K)^+$. Giá tại thời điểm 0 là:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{(S_n - K)^+}{M_n}\right] \\
&= \widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-rn}\left(S_0 \exp\left\{\sigma \sum_{j=1}^{n} \tilde{Y}_j + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)n\right\} - K\right)^+\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rn}\left(S_0 \exp\left\{\sigma x + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)n\right\} - K\right)^+ \times \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{x^2}{2n}} dx
\end{aligned}$$

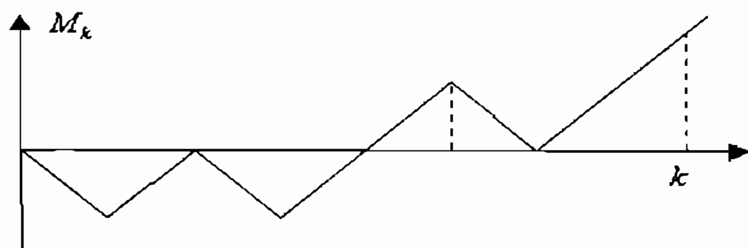
(vì $\sum_{j=1}^{n} \tilde{Y}_j$ là biến chuẩn với trung bình: 0, phương sai: n, dưới $\widetilde{\mathbb{P}}$).

3.1.5 Chuyển động Brown hình học

1. Chuyển động Brown hình học

Tung một đồng xu vô hạn lần, không gian mẫu Ω là tập của tất cả các dãy vô hạn $\omega = (\omega_1, \omega_2, ...)$ của H và T. Giả sử các lần tung là độc lập, trong mỗi lần tung, xác suất của H và T đều bằng $\frac{1}{2}$. Định nghĩa:

$$X_j(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \omega_j = H, \\ -1 & \text{nếu } \omega_j = T. \end{cases}$$



Hình 3.2: Quá trình bước ngẫu nhiên M_k.

Đặt:

$$M_0 = 0$$
$$M_k = \sum_{j=1}^{k} X_j, \qquad k \geq 1.$$

Quá trình $\{M_k\}_{k=0}^{\infty}$ gọi là một bước ngẫu nhiên (random walk). Quỹ đạo của nó là một hình ảnh đơn giản của một chuyển động Brown trong thời gian liên tục (xem hình 3.2).

Quá trình $\{M_k\}_{k=0}^{\infty}$ có một số tính chất sau:

Định lý 3.1.5. (Luật số lớn).

$$\frac{1}{k} M_k \longrightarrow 0 \text{ hầu chắc chắn, khi } \quad k \to \infty.$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}
\varphi_k(u) &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{u}{k} M_k\right\}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left\{\sum_{j=1}^{k} \frac{u}{k} X_j\right\}\right] \quad \text{(Định nghĩa của } M_k) \\
&= \prod_{j=1}^{k} \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{u}{k} X_j\right\}\right] \quad \text{(Sự độc lập của các } X_j) \\
&= \left(\frac{1}{2} e^{\frac{u}{k}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{u}{k}}\right)^k.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

$$\log \varphi_k(u) = k \log\left(\frac{1}{2}e^{\frac{u}{k}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{u}{k}}\right).$$

Đặt $x = \dfrac{1}{k}$, khi đó:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \log \varphi_k(u) &= \lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{1}{2}e^{ux} + \frac{1}{2}e^{-ux}\right)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{u}{2}e^{ux} - \frac{u}{2}e^{-ux}}{\frac{1}{2}e^{ux} + \frac{1}{2}e^{-ux}} \quad \text{(Quy tắc L'Hôpital)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vì thế cho nên:

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(u) = e^0 = 1,$$

là hàm moment sinh của hằng số 0. Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

Định lý 3.1.6. (Định lý giới hạn trung tâm).

$$\frac{1}{\sqrt{k}} M_k \to \textit{ Biến ngẫu nhiên chuẩn hóa, khi } k \to \infty.$$

Chứng minh. Ta có:

$$\begin{aligned}
\varphi_k(u) &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{u}{\sqrt{k}} M_k\right\}\right] \\
&= \left(\frac{1}{2}e^{\frac{u}{\sqrt{k}}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{u}{\sqrt{k}}}\right)^k,
\end{aligned}$$

vì

$$\log \varphi_k(u) = k \log\left(\frac{1}{2}e^{\frac{u}{\sqrt{k}}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{u}{\sqrt{k}}}\right).$$

Đặt $x = \frac{1}{\sqrt{k}}$, khi đó:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \log \varphi_k(u) &= \lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{1}{2}e^{ux} + \frac{1}{2}e^{-ux}\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{u}{2}e^{ux} - \frac{u}{2}e^{-ux}}{2x\left(\frac{1}{2}e^{ux} + \frac{1}{2}e^{-ux}\right)} \qquad \text{(Quy tắc L'Hôpital)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}e^{ux} + \frac{1}{2}e^{-ux}\right)} \times \lim_{x\to 0} \frac{\frac{u}{2}e^{ux} - \frac{u}{2}e^{-ux}}{2x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{u}{2}e^{ux} - \frac{u}{2}e^{-ux}}{2x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{u^2}{2}e^{ux} - \frac{u^2}{2}e^{-ux}}{2} \\
&= \frac{1}{2}u^2.
\end{aligned}$$

Vì thế cho nên:

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(u) = e^{\frac{1}{2}u^2},$$

là hàm moment sinh của một biến ngẫu nhiên chuẩn hóa. Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

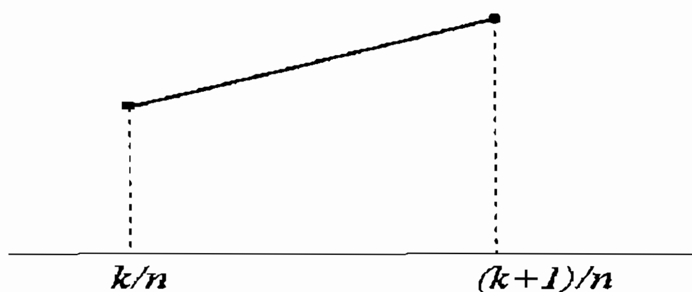
2. Chuyển động Brown như một giới hạn của các bước ngẫu nhiên

Giả sử n là một số nguyên dương. Nếu $t \geq 0$ và có dạng $\frac{k}{n}$, khi đó đặt

$$B^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}M_{tn} = \frac{1}{\sqrt{n}}M_k.$$

Nếu $t \geq 0$ không có dạng $\frac{k}{n}$, thì định nghĩa $B^{(n)}(t)$ bởi phép nội suy (xem hình 3.3).

Sau đây là một số tính chất của $B^{(100)}(t)$:



Hình 3.3: Phép nội suy tuyến tính để xác định $B_t^{(n)}$.

Các tính chất của $B^{(100)}(1)$:

$$B^{(100)}(1) = \frac{1}{10}\sum_{j=1}^{100} X_j \qquad \text{(Xấp xỉ chuẩn)},$$

$$\mathbb{E}[B^{(100)}(1)] = \frac{1}{10}\sum_{j=1}^{100} \mathbb{E}[X_j] = 0,$$

$$\mathrm{Var}[B^{(100)}(1)] = \frac{1}{100}\sum_{j=1}^{100} \mathrm{Var}[X_j] = 1.$$

Các tính chất của $B^{(100)}(2)$:

$$B^{(100)}(2) = \frac{1}{10}\sum_{j=1}^{200} X_j \qquad \text{(Xấp xỉ chuẩn)},$$

$$\mathbb{E}[B^{(100)}(2)] = 0,$$

$$\mathrm{Var}[B^{(100)}(2)] = 2.$$

Ta cũng nhận thấy rằng:

- $B^{(100)}(1)$ và $B^{(100)}(2) - B^{(100)}(1)$ là độc lập.
- $B^{(100)}(t)$ là một hàm liên tục của t.

Để nhận được chuyển động Brown, cho $n \to \infty$ trong $B^{(n)}(t)$, $t \geq 0$.

3.2 Quá trình ngẫu nhiên với thời gian liên tục

Trong chương 2 chúng ta đã làm quen với các quá trình ngẫu nhiên với thời gian rời rạc. Trong mục này ta mở rộng các kết quả đó cho các quá trình ngẫu nhiên với thời gian liên tục.

3.2.1 Khái niệm

Cho $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ là một không gian xác suất.

Một quá trình ngẫu nhiên (X_t), $t \geq 0$ là một hàm hai biến $X(t, \omega)$ xác định trên tích $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ lấy giá trị trong $\mathbb{R}$, và là một hàm đo được đối với σ-trường tích $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^+} \times \mathcal{F}$, trong đó $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^+}$ là σ-trường các tập Borel trên $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$.

Nhận xét:

(a) Với mỗi $t \geq 0$ thì $X(t, \omega)$ là một biến ngẫu nhiên.

(b) Khi cố định một $\omega \in \Omega$, thì ánh xạ riêng phần:

$$t \longmapsto X(t, \omega)$$

từ $\mathbb{R}^+$ vào $\mathbb{R}$ được gọi là một *quỹ đạo* của quá trình ngẫu nhiên $X = (X_t)$, $t \geq 0$, ứng với yếu tố ngẫu nhiên ω ấy.

(c) Nếu X lấy giá trị trong không gian $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ thì ta có một quá trình ngẫu nhiên n-chiều.

(d) Trong tài chính, các quá trình giá chứng khoán S_t, giá trái phiếu P_t, giá sản phẩm phái sinh C_t, ... đều được xem là các quá trình ngẫu nhiên.

3.2.2 Quá trình ngẫu nhiên thích nghi với một bộ lọc

Một họ các σ-trường con $(\mathcal{F}_t)$, $t \geq 0$ của $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, được gọi là một bộ lọc thỏa mãn các *điều kiện thông thường* nếu:

- Đó là một họ tăng theo t, tức là $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ nếu $s < t$,
- Họ đó là liên tục phải, tức là $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$,
- Nếu $A \in \mathcal{F}$ và $\mathbb{P}(A) = 0$ thì $A \in \mathcal{F}_0$ (và do đó A nằm trong mọi $\mathcal{F}_t$).

Cho một quá trình ngẫu nhiên $X = (X_t)$, $t \geq 0$. Ta xét σ-trường $\mathcal{F}_t^X$ sinh bởi tất cả các biến ngẫu nhiên X_s với $s \leq t$: $\mathcal{F}_t^X = \sigma\ (X_s,\ s \leq t)$. σ-trường này chứa đựng mọi thông tin về diễn biến quá khứ của quá trình X cho đến thời điểm t. Người ta gọi đó là bộ lọc tự nhiên của quá trình X, hay là lịch sử của X, hay cũng còn gọi là trường thông tin về X.

Một không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ trên đó ta gắn thêm vào một bộ lọc $(\mathcal{F}_t)$, được gọi là một *không gian xác suất được lọc* và ký hiệu là $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$.

Cho một không gian xác suất được lọc $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$. Một quá trình ngẫu nhiên $X = (X_t)$, $t \geq 0$ được gọi là thích nghi với bộ lọc $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ nếu với mỗi $t \geq 0$, X_t là $\mathcal{F}_t$-đo được.

3.2.3 Thời điểm Markov và thời điểm dừng

Cho một không gian xác suất được lọc $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$.

Một biến ngẫu nhiên τ được gọi là một thời điểm Markov nếu với mọi $t \geq 0$ ta có

$$\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Một thời điểm Markov τ được gọi là thời điểm dừng nếu τ là hữu hạn hầu chắc chắn, tức là:

$$P\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) < \infty\} = 1.$$

3.2.4 Kỳ vọng có điều kiện lấy đối với một σ-trường

Cho $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ là một không gian xác suất, $\mathcal{G}$ là một σ-trường con của $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ và X là một biến ngẫu nhiên, tức là một ánh xạ đo được từ $(\Omega, \mathcal{F})$ vào $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, trong đó $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ là σ-trường các tập Borel trên đường thẳng $\mathbb{R}$.

Một biến ngẫu nhiên Y sẽ được gọi là kỳ vọng có điều kiện của X đối với σ-trường $\mathcal{G}$, nếu:

- Y là biến ngẫu nhiên đo được đối với $\mathcal{G}$,
- Với mọi tập $A \in \mathcal{G}$ thì ta có:

$$\int_A Y dP = \int_A X dP.$$

Biến ngẫu nhiên Y này sẽ được ký hiệu là $\mathbb{E}(X \,|\, \mathcal{G})$.

Nếu ta chọn σ-trường $\mathcal{G}$ là σ-trường $\sigma(Z)$ sinh ra bởi một biến ngẫu nhiên Z nào đó, thì khi đó kỳ vọng có điều kiện của X lấy đối với $\sigma(Z)$ cũng được ký hiệu là $\mathbb{E}(X \mid Z)$.

3.2.5 Các tính chất của kỳ vọng có điều kiện

Các hệ thức phát biểu dưới đây đều được hiểu theo nghĩa *hầu chắc chắn*:
(1) Nếu $\mathcal{G}$ là σ-trường tầm thường $\{\phi, \Omega\}$ thì:

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}[X].$$

(2) Nếu X và Y là hai biến ngẫu nhiên thì:

$$\mathbb{E}(X + Y \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) + \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G}).$$

(3) Nếu X là đo được đối với $\mathcal{G}$ thì:

$$\mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G}) = X\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G}).$$

Nói riêng, nếu c là một hằng số thì

$$\mathbb{E}(cY \mid \mathcal{G}) = c\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G}).$$

(4) Nếu $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ thì:

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}_2) \mid \mathcal{G}_1\big) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}_1).$$

Nói riêng

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\big) = \mathbb{E}[X].$$

(5) Nếu X độc lập đối với $\mathcal{G}$ thì:

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}[X].$$

(6) Nếu $\mathcal{G}$ và $\mathcal{H}$ là hai σ-trường con của $\mathcal{F}$ và độc lập đối với nhau, và X là biến ngẫu nhiên độc lập đối với $\mathcal{G}$ thì:

$$\mathbb{E}\big(X \mid \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})\big) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}),$$

trong đó $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ là σ-trường nhỏ nhất chứa cả $\mathcal{G}$ lẫn $\mathcal{H}$.
(7) *Bất đẳng thức Jensen đối với kỳ vọng có điều kiện*
Nếu $g(x)$ là một hàm lồi trên tập lồi $I \subset \mathbb{R}$, tức là:

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$$

với mọi $x, y \in I$ và mọi $\lambda \in [0, 1)$, và nếu X là một biến ngẫu nhiên lấy giá trị trên I thì:

$$g\big(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\big) \leq \mathbb{E}\big(g(X) \mid \mathcal{G}\big).$$

Nói riêng, với $g(x) = |x|$ thì:

$$\left|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\right| \leq \mathbb{E}\left(|X| \mid \mathcal{G}\right).$$

(8) *Sự hội tụ đơn điệu đối với kỳ vọng có điều kiện*
Nếu $0 \leq X_n$ và $X_n \uparrow X$ (X_n đơn điệu tăng dần tới X khi $n \to \infty$) với $\mathbb{E}|X| < \infty$ thì:

$$\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{G}) \uparrow \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}).$$

(9) *Bổ đề Fatou đối với kỳ vọng có điều kiện*
Nếu $0 \leq X_n$ thì:

$$\mathbb{E}\left(\liminf_n X_n \mid \mathcal{G}\right) \leq \liminf_n \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{G}).$$

(10) *Sự hội tụ chặn đối với kỳ vọng có điều kiện*
Nếu $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ hầu chắc chắn và $|X_n| \leq Y$ với $\mathbb{E}[Y] < \infty$ thì:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}).$$

(11) Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập và $\phi(x, y)$ là một hàm hai biến sao cho $\mathbb{E}\left|\phi(X, Y)\right| < \infty$. Khi đó:

$$\mathbb{E}\left(\phi(X, Y) \mid Y\right) = \mathbb{E}\left(\phi(X, Y)\right).$$

3.2.6 Xác suất có điều kiện

Xác suất có điều kiện $\mathbb{P}(A \mid \mathcal{G})$ của một biến cố $A \in \mathcal{F}$ là một biến ngẫu nhiên xác định bởi:

$$\mathbb{P}(A \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mid \mathcal{G}).$$

Dễ thấy xác suất $\mathbb{P}(A \mid \mathcal{G})$ có một số tính chất sau (hầu chắc chắn):
(1) $\mathbb{P}(\Omega \mid \mathcal{G}) = 1$.
(2) $\forall A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(\overline{A} \mid \mathcal{G}) = 1 - \mathbb{P}(A \mid \mathcal{G})$.
(3) $\forall A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ rời nhau từng đôi một thì

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \mid \mathcal{G}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n \mid \mathcal{G}).$$

3.2.7 Martingale

Cho một quá trình ngẫu nhiên $X = (X_t),\ t \geq 0$ thích nghi với bộ lọc $(\mathcal{F}_t)$ và khả tích: $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ với mọi $t \geq 0$.

Với s và t là hai số thực không âm sao cho $s \leq t$, khi đó:
(1) Nếu $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leq X_s$ thì X gọi là martingale trên (supermartingale).
(2) Nếu $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s$ thì X gọi là martingale dưới (submartingale).
(3) Nếu $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s$ thì X gọi là martingale.

Khi không chỉ rõ bộ lọc nào thì ta hiểu rằng $(\mathcal{F}_t)$ là bộ lọc tự nhiên của (X_t) tức là $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s,\ s \leq t)$ và thường ký hiệu là $\mathcal{F}_t^X$.

Một số ví dụ về martingale

Ví dụ 3.2.1. Cho Z là một biến ngẫu nhiên bất kỳ sao cho $\mathbb{E}[Z] < \infty$ (khả tích) và cho $(\mathcal{F}_t)$ là một bộ lọc bất kỳ trên $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Khi đó quá trình ngẫu nhiên $X = (X_t),\ t \geq 0$ xác định bởi:

$$X_t = \mathbb{E}(Z \mid \mathcal{F}_t)$$

là một martingale đối với $(\mathcal{F}_t)$.

Ví dụ 3.2.2. Cho $X = (X_t),\ t \geq 0$ là một quá trình ngẫu nhiên khả tích, thích nghi với bộ lọc $(\mathcal{F}_t)$, và giả thử rằng:

Với mọi $s, t \geq 0$ sao cho $s < t$ thì $X_t - X_s$ độc lập với $\mathcal{F}_s$..

Tính chất này được gọi là tính chất *có số gia độc lập với quá khứ*. Khi đó, quá trình ngẫu nhiên $Z = (Z_t,\ t \geq 0)$ xác định bởi:

$$Z_t = X_t - \mathbb{E}[X_t]$$

là một martingale đối với $(\mathcal{F}_t)$.

Ví dụ 3.2.3. Cho (X_t) là một quá trình có số gia độc lập, không nhất thiết phải khả tích. Gọi $\varphi_{X_t}(u)$ là hàm đặc trưng của X_t, tức là:

$$\varphi_{X_t}(u) = \mathbb{E}\left[e^{iuX_t}\right] = \int_{\mathbb{R}} e^{iuX_t}\, d\mathbb{P}.$$

Khi đó quá trình ngẫu nhiên $Y = (Y_t,\ t \geq 0)$ xác định bởi:

$$Y_t = \frac{e^{iuX_t}}{\varphi_{X_t}(u)}$$

là một martingale đối với bộ lọc tự nhiên của $X : \mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s,\ s \leq t)$.

Ví dụ 3.2.4. Trên không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ cho $\mathbb{Q}$ là một độ đo xác suất liên tục tuyệt đối đối với $\mathbb{P} : \mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$.

Gọi *cái hạn chế* của $\mathbb{P}$ trên $\mathcal{F}_t$ là $\mathbb{P}_t$ và *cái hạn chế* của $\mathbb{Q}$ trên $\mathcal{F}_t$ là $\mathbb{Q}_t$. Khi đó đạo hàm Radon-Nikodym $L_t = \dfrac{d\mathbb{Q}_t}{d\mathbb{P}_t}$ tồn tại, và quá trình $L = (L_t),\ t \geq 0$ là một martingale đối với $(\mathcal{F}_t)$.

Ta có định lý sau:

Định lý 3.2.1. (Khai triển Doob-Meyer). *Nếu $X = (X_t),\ t \geq 0$ là một martingale dưới đối với $(\mathcal{F}_t)$, khả tích (tức $\mathbb{E}|X_t| < \infty,\ \forall t \geq 0$) và liên tục phải theo t, thì X có thể khai triển dưới dạng:*

$$X_t = M_t + A_t$$

trong đó M_t là một martingale đối với $(\mathcal{F}_t)$ liên tục phải và A_t là một quá trình tăng và thích nghi với $(\mathcal{F}_t)$.

3.3 Chuyển động Brown

Một quá trình ngẫu nhiên $B = B(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$, viết tắt là $B(t)$ (xem hình 3.4) được gọi là một chuyển động Brown nếu nó thoả mãn các tính chất sau:

1. $B(0) = 0$, tức là $\mathbb{P}\{\omega; B(0, \omega) = 0\} = 1$.
2. $B(t)$ là hàm liên tục theo t.
3. $B(t)$ có các số gia độc lập, phân phối chuẩn; tức là: Nếu

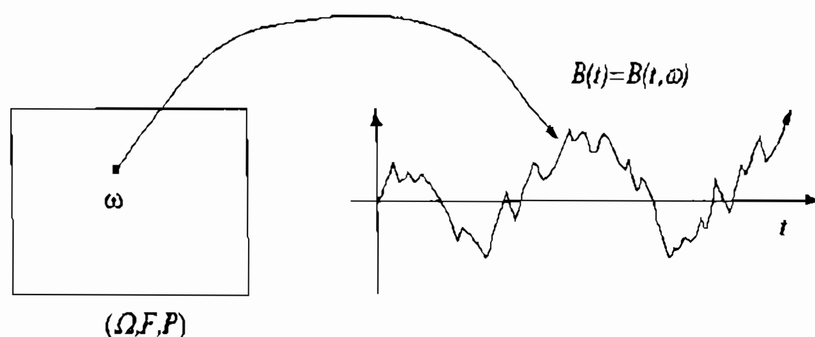
$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n,$$

và

$$Y_1 = B(t_1) - B(t_0),\ \ Y_2 = B(t_2) - B(t_1),\ \dots,\ Y_n = B(t_n) - B(t_{n-1}),$$

thì:

- $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập, có phân phối chuẩn;
- $\mathbb{E}[Y_j] = 0 \qquad \forall j$;
- $\mathrm{Var}[Y_j] = t_j - t_{j-1} \qquad \forall j$.



Hình 3.4: Chuyển động Brown với thời gian liên tục.

3.3.1 Hiệp phương sai của chuyển động Brown

Giả sử $0 \le s \le t$ đã cho, khi đó $B(s)$ và $B(t)$ là các biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn. Hơn nữa, $B(s)$ độc lập với $B(t) - B(s)$ và ta có:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B(s)] &= 0, \quad \mathrm{Var}[B(s)] = s, \\ \mathbb{E}[B(t)] &= 0, \quad \mathrm{Var}[B(t)] = t. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B(s)B(t)] &= \mathbb{E}\left[B(s)\left[(B(t) - B(s)) + B(s)\right]\right] \\ &= \underbrace{\mathbb{E}[B(s)(B(t) - B(s))]}_{0} + \underbrace{\mathbb{E}[B^2(s)]}_{s} \\ &= s. \end{aligned}$$

Vì thế với bất kỳ $s \ge 0, t \ge 0$ (không cần $s \le t$,) ta có:

$$\mathbb{E}[B(s)B(t)] = s \wedge t.$$

Từ đó suy ra hàm hiệp phương sai:

$$R(s,t) = \mathrm{Cov}[B(s), B(t)] = s \wedge t. \tag{3.9}$$

3.3.2 Phân phối hữu hạn chiều của chuyển động Brown

Giả sử $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$ là một phân hoạch nào đó của đoạn $[0, t]$ đã cho. Khi đó $(B(t_1), B(t_2), ..., B(t_n))$ là vector ngẫu nhiên chuẩn với ma trận hiệp phương sai:

$$C = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[B^2(t_1)] & \mathbb{E}[B(t_1)B(t_2)] & ... & \mathbb{E}[B(t_1)B(t_n)] \\ \mathbb{E}[B(t_2)B(t_1)] & \mathbb{E}[B^2(t_2)] & ... & \mathbb{E}[B(t_2)B(t_n)] \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbb{E}[B(t_n)B(t_1)] & \mathbb{E}[B(t_n)B(t_2)] & ... & \mathbb{E}[B^2(t_n)] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} t_1 & t_1 & ... & t_1 \\ t_1 & t_2 & ... & t_2 \\ ... & ... & ... & ... \\ t_1 & t_2 & ... & t_n \end{bmatrix}.$$

3.3.3 Lọc sinh bởi một chuyển động Brown

Trong mục này chúng ta xây dựng một bộ lọc $\{\mathcal{F}(t)\}_{t\geq 0}$, thoả mãn các tính chất:

- Với mỗi t, $B(t)$ là $\mathcal{F}(t)$-đo được,
- Với mỗi t và với $t < t_1 < t_2 < ... < t_n$, các số gia của chuyển động Brown

$$B(t_1) - B(t), \quad B(t_2) - B(t_1), ..., \quad B(t_n) - B(t_{n-1})$$

là độc lập với $\mathcal{F}(t)$.

Ta có thể cấu trúc $\mathcal{F}(t)$ như sau:

Trước tiên ta cố định t. Giả sử $s \in [0, t]$ và $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ đã cho. Đặt tập

$$\{B(s) \in C\} = \{\omega : B(s, \omega) \in C\}$$

vào $\mathcal{F}(t)$. Làm như vậy với mọi số dương $s \in [0, t]$ và $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Sau đó bổ sung thêm các tập khác để $\mathcal{F}(t)$ trở thành σ-đại số với mỗi $t \geq 0$.

Rõ ràng $\mathcal{F}(t)$ chứa các thông tin có được bởi quan sát chuyển động Brown cho tới thời điểm t. Họ $\{\mathcal{F}(t)\}_{t\geq 0}$ được gọi là lọc sinh bởi chuyển động Brown. Trong các mục sau, nếu không nói gì thêm ta luôn hiểu các quá trình thích nghi được xét với bộ lọc này.

3.3.4 Tính chất Martingale

Định lý 3.3.1. *Chuyển động Broun là một Martingale.*

Chứng minh. Dễ thấy chuyển động Brown $B(t)$ là một quá trình thích nghi với bộ lọc $\{\mathcal{F}(t)\}_{t\geq 0}$. Với $0 \leq s \leq t$, ta có:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[B(t)|\mathcal{F}(s)\right] &= \mathbb{E}\left[(B(t)-B(s))+B(s)|\mathcal{F}(s)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[B(t)-B(s)\right]+B(s) \\
&= B(s).
\end{aligned}$$

□

Định lý 3.3.2. *Giả sử $\theta \in \mathbb{R}$ đã cho. Khi đó:*

$$Z(t) = \exp\left\{-\theta B(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t\right\}$$

là một martingale.

Chứng minh. Từ định nghĩa suy ra $Z(t)$ là một quá trình thích nghi với bộ lọc $\{\mathcal{F}(t)\}_{t\geq 0}$. Với mỗi $0 \leq s \leq t$, ta có:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[Z(t)|\mathcal{F}(s)\right] \\
=\ &\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\theta(B(t)-B(s)+B(s)) - \frac{1}{2}\theta^2\left((t-s)+s\right)\right\}\Big|\mathcal{F}(s)\right] \\
=\ &\mathbb{E}\left[Z(s)\exp\left\{-\theta(B(t)-B(s)) - \frac{1}{2}\theta^2(t-s)\right\}\Big|\mathcal{F}(s)\right] \\
=\ &Z(s)\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\theta(B(t)-B(s)) - \frac{1}{2}\theta^2(t-s)\right\}\Big|\mathcal{F}(s)\right] \\
=\ &Z(s)\exp\left\{\frac{1}{2}(-\theta)^2\mathrm{Var}(B(t)-B(s)) - \frac{1}{2}\theta^2(t-s)\right\} \\
=\ &Z(s).
\end{aligned}$$

□

3.3.5 Giới hạn của một mô hình nhị phân

Xét một mô hình nhị phân n thời kỳ, trong mỗi thời kỳ thứ $k, 1 \leq k \leq n$ ta giả thiết các tham số như sau:

- $u_k = 1 + \dfrac{\sigma}{\sqrt{k}}$ là nhân tử "Tăng" ($\sigma > 0$).
- $d_k = 1 - \dfrac{\sigma}{\sqrt{k}}$ là nhân tử "Giảm".
- $r = 0$.
- $\tilde{p}_k = \dfrac{1 - d_k}{u_k - d_k} = \dfrac{\sigma/\sqrt{k}}{2\sigma/\sqrt{k}} = \dfrac{1}{2}$.
- $\tilde{q}_k = \dfrac{1}{2}$.

Giả sử ký hiệu $\sharp_k(H)$ là số H trong k lần tung đồng xu đầu tiên, và $\sharp_k(T)$ là số T trong k lần tung đồng xu đầu tiên. Khi đó:

$$\sharp_k(H) + \sharp_k(T) = k$$
$$\sharp_k(H) - \sharp_k(T) = M_k$$

do đó suy ra:

$$\sharp_k(H) = \frac{1}{2}(k + M_k)$$
$$\sharp_k(T) = \frac{1}{2}(k - M_k).$$

Trong mô hình thứ n, lấy n bước đơn vị thời gian. Đặt $S_0^{(n)} = 1$. Giả sử $t = \dfrac{k}{n}$ với k nào đó, và giả sử

$$S^{(n)}(t) = \left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{2}(nt + M_{nt})} \left(1 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{2}(nt - M_{nt})}.$$

Dưới độ đo $\widetilde{\mathbb{P}}$, quá trình giá $S^{(n)}$ là một martingale.

Định lý 3.3.3. *Khi $n \to \infty$, phân phối của $S^{(n)}(t)$ hội tụ tới phân phối của*

$$\exp\left\{\sigma B(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\},$$

trong đó $B(t)$ là một chuyển động Brown. Sự hiệu chỉnh $\dfrac{1}{2}\sigma^2 t$ ở đây là cần thiết để có một martingale.

Chứng minh. Sử dụng khai triển Taylor ta có:

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3).$$

Do vậy:

$$\begin{aligned}
\log S^{(n)}(t) &= \frac{1}{2}(nt + M_{nt}) \log\left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{2}(nt - M_{nt})\left(1 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\
&= nt\left(\frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right) \\
&\quad + M_{nt}\left(\frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right) \\
&= nt\left(\frac{1}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{n} - \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{n} + O(n^{-3/2})\right) \\
&\quad + M_{nt}\left(\frac{1}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{n} + \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{n} + O(n^{-3/2})\right) \\
&= -\frac{1}{2}\sigma^2 t + O(n^{-\frac{1}{2}}) \\
&\quad + \sigma\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}M_{nt}\right)}_{\to B_t} + \underbrace{\left(\frac{1}{n}M_{nt}\right)}_{\to 0} O(n^{-\frac{1}{2}}).
\end{aligned}$$

Khi $n \to \infty$ phân phối của $\log S^{(n)}(t)$ dần tới phân phối của $\sigma B(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t$. □

Chú ý 3.3.1. (Bắt đầu tại điểm khác 0). *Với một chuyển động Brown $B(t)$ xuất phát từ 0, ta có:*

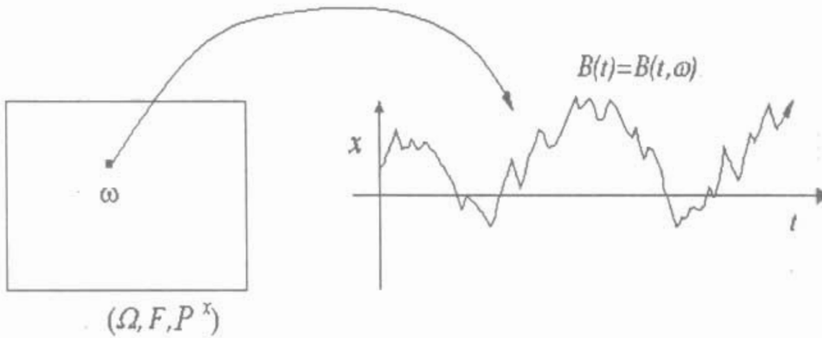
$$\mathbb{P}(B(0) = 0) = 1.$$

Với một chuyển động Brown $B(t)$ xuất phát tại $x \neq 0$, ký hiệu độ đo xác suất tương ứng bởi $\mathbb{P}^x$ (xem hình 3.5), ta có

$$\mathbb{P}^x(B(0) = x) = 1.$$

Nhận thấy rằng:

- *Nếu $x \neq 0$ thì xác suất $\mathbb{P}^x$ trên tất cả các tập khác $\mathbb{P}$.*
- *Phân phối của $B(t)$ dưới $\mathbb{P}^x$ giống phân phối của $x + B(t)$ dưới $\mathbb{P}$.*



Hình 3.5: Chuyển động Brown với thời gian liên tục, bắt đầu tại $x \neq 0$.

3.3.6 Tính chất Markov của chuyển động Brown

Ta có định lý sau:

Định lý 3.3.4. *Chuyển động Brown có tính Markov.*

Chứng minh. Giả sử $s \geq 0,\ \ t \geq 0$ đã cho (xem hình 3.6)

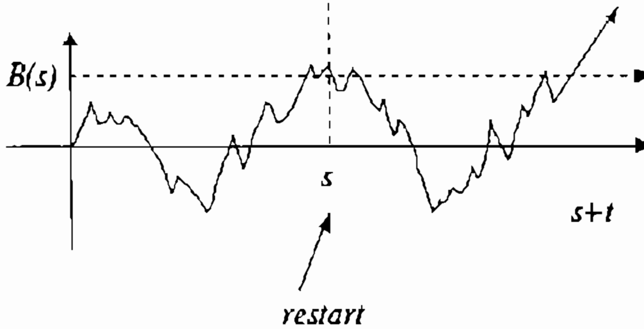
$$\mathbb{E}\left[h\left(B(s+t)\right)\Big|\mathcal{F}(s)\right] = \mathbb{E}\left[h(\underbrace{B(s+t)-B(s)}_{\text{Độc lập với } \mathcal{F}(s)} + \underbrace{B(s)}_{\mathcal{F}(s) \text{ đo được}})\Big|\mathcal{F}(s)\right]$$

Sử dụng bổ đề 2.4.1, định nghĩa

$$\begin{aligned} g(x) &= \mathbb{E}\left[h(B(s)-B(s)+x)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[h(x+\underbrace{B(t)}_{\text{cùng phân phối với } B(s+t)-B(s)})\right] \\ &= \mathbb{E}^x h(B(t)). \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[h\left(B(s+t)\right)\Big|\mathcal{F}(s)\right] &= g(B(s)) \\ &= \mathbb{E}^{B(s)}h(B(t)). \end{aligned}$$



Hình 3.6: Tính chất Markov của chuyển động Brown.

□

Ta còn có thể chỉ ra chuyển động Brown có tính Markov mạnh.

Ví dụ 3.3.1. (Tính chất Markov mạnh). Cố định $x > 0$ và định nghĩa (xem hình 3.7)

$$\tau = \min\{t \geq 0;\ B(t) = x\}. \tag{3.10}$$

Khi đó ta có:

$$\mathbb{E}\left[h(B(\tau+t))\Big|F(\tau)\right] = g(B(\tau)) = \mathbb{E}^x h(B(t)).$$

Chú ý 3.3.2. (Mật độ xác suất chuyển). *Giả sử $p(t,x,y)$ là xác suất mà chuyển động Brown chuyển giá trị từ x tới y trong thời gian t và giả sử τ xác định như trong (3.10). Ta có:*

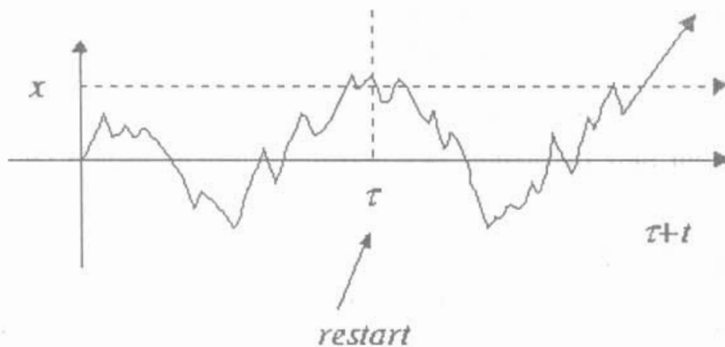
$$p(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}$$

Đặt:

$$g(x) = \mathbb{E}^x h(B(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y)p(t,x,y)dy.$$

Ta có:

$$\mathbb{E}\left[h(B(s+t))\Big|F(s)\right] = g(B(s)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y)p(t,B(s),y)dy.$$



Hình 3.7: Tính Markov mạnh của chuyển động Brown.

$$\mathbb{E}\left[h(B(\tau+t))\Big|F(\tau)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y)p(t,x,y)dy.$$

BÀI TẬP

Bài tập 3.1. Với mỗi $t \geq 0$ chuyển động Brown B_t là một biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(0,t)$.

a) Chứng minh rằng $\mathbb{E}[e^{iuB_t}] = \exp\left(-\frac{1}{2}u^2 t\right)$ với mọi $u \in \mathbb{R}$.

b) Tìm hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên B_t^2.

c) Chứng minh rằng với mọi hàm f ta có:

$$\mathbb{E}[f(B_t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\frac{x^2}{2t}}dx.$$

d) Chứng minh rằng $\mathbb{E}[B_t^4] = 3t^2$ từ đó suy ra:

$$\mathbb{E}[B_t^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k.k!}t^k; \quad k \in \mathbb{N}.$$

Bài tập 3.2. Một quá trình ngẫu nhiên X_t được gọi là dừng nếu $\{X_t\}$ có cùng phân phối với $\{X_{t+h}\}$ với bất kỳ $h > 0$. Chứng minh rằng chuyển động Brown B_t có số gia dừng, tức là, các quá trình $\{B_{t+h} - B_h\}_{h\geq 0}$ có cùng phân phối với mọi t.

Bài tập 3.3. Cho B_t là một chuyển động Brown và $t_0 \leq 0$ cố định. Chứng minh rằng quá trình: $\widetilde{B}_t = B_{t_0+t} - B_{t_0}, t \geq 0$ cũng là một chuyển động Brown.

Bài tập 3.4. Cho B_t là một chuyển động Brown 1-chiều và $c > 0$ là một hằng số. Chứng minh rằng quá trình: $\widetilde{B}_t = \frac{1}{c}B_{c^2t}, t \geq 0$ cũng là một chuyển động Brown.

Bài tập 3.5. Cho $(B_t), t \geq 0$ là một chuyển động Brown. Xét xem các quá trình ngẫu nhiên sau đây có phải là một martingale hay không:

a) $X_t = B_t + 4t$.

b) $X_t = B_t^2$.

c) $X_t = B_t^2 - t$.

Bài tập 3.6. Chứng minh rằng quá trình: $M_t = B_t^3 - 3tB_t, t \geq 0$ là một martingale.

Bài tập 3.7. Cho B_t là một chuyển động Brown 2-chiều và đặt:

$$D_\rho = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| < \rho\} \quad \text{với} \quad \rho > 0.$$

Hãy tính $\mathbb{P}[B_t \in D_\rho]$.

Bài tập 3.8. Cho B_t là một chuyển động Brown n-chiều bắt đầu tại 0 và đặt: $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là một ma trận trực giao, tức là $UU^T = I$. Chứng minh rằng quá trình: $\widetilde{B}_t = UB_t, t \geq 0$ cũng là một chuyển động Brown.

Chương 4

Tích phân ngẫu nhiên và ứng dụng

Trong chương này chúng ta tìm hiểu những vấn đề sau:

- Tích phân ngẫu nhiên Itô.
- Công thức Itô.
- Tích phân ngẫu nhiên Stratonovich.

4.1 Tích phân ngẫu nhiên Itô

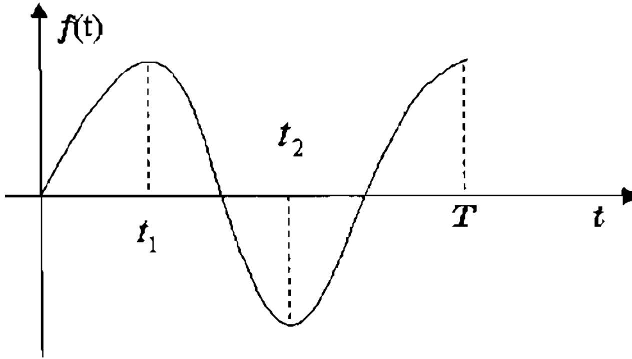
Giả sử đã cho không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ và $B(t)$ là một chuyển động Brown.

4.1.1 Biến phân bậc nhất

Ví dụ 4.1.1. Xét hàm số $f(t)$ có dạng trong hình 4.1

Biến phân bậc nhất $FV(f)$ của hàm số $f(t)$ trên khoảng $[0, T]$ được xác định như sau:

$$\begin{aligned} FV_{[0,T]}(f) &= [f(t_1) - f(0)] - [f(t_2) - f(t_1)] + [f(T) - f(t_2)] \\ &= \int_0^{t_1} f'(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} (-f'(t))dt + \int_{t_2}^{T} f'(t)dt \\ &= \int_0^{T} |f'(t)|\, dt. \end{aligned}$$



Hình 4.1: Minh họa biến phân bậc nhất của hàm $f(t)$.

Một cách hình ảnh, có thể nói, biến phân bậc nhất là tổng các lượng tăng và giảm của quỹ đạo.

Ta có định nghĩa tổng quát như sau:

Định nghĩa 4.1.1. (Biến phân bậc nhất). *Giả sử* $\Pi = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ *là một phân hoạch của đoạn* $[0, T]$

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = T,$$

và gọi $\|\Pi\| = \max_{0 \leq k \leq n-1} (t_{k+1} - t_k)$ *là đường kính của phân hoạch đó. Biến phân bậc nhất của hàm số* f *trên đoạn* $[0, T]$, *ký hiệu* $FV_{[0,T]}(f)$ *xác định bởi:*

$$FV_{[0,T]}(f) = \lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)|.$$

Ví dụ 4.1.2. (Biến phân bậc nhất của hàm khả vi). Giả sử f là một hàm khả vi. Khi đó, theo định lý giá trị trung bình trong mỗi đoạn $[t_k, t_{k+1}]$ có một điểm t_k^* sao cho:

$$f(t_{k+1}) - f(t_k) = f'(t_k^*)(t_{k+1} - t_k). \tag{4.1}$$

Do đó:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} |f'(t_k^*)|(t_{k+1} - t_k),$$

và

$$\begin{aligned} FV_{[0,T]}(f) &= \lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} |f'(t_k^*)| \, (t_{k+1} - t_k) \\ &= \int_0^T |f'(t)| \, dt. \end{aligned}$$

4.1.2 Biến phân bậc hai

Định nghĩa 4.1.2. (Biến phân bậc hai). *Biến phân bậc hai của hàm f trên đoạn $[0, T]$, ký hiệu $\langle f \rangle (T)$ xác định bởi:*

$$\langle f \rangle (T) = \lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)|^2 .$$

Ví dụ 4.1.3. (Biến phân bậc hai của hàm khả vi). Giả sử f là một hàm khả vi, khi đó

$$\langle f \rangle (T) = 0.$$

Thật vậy, từ (4.1) ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)|^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} |f'(t_k^*)|^2 \, (t_{k+1} - t_k)^2 \\ &\leq \|\Pi\| \times \sum_{k=0}^{n-1} |f'(t_k^*)|^2 \, (t_{k+1} - t_k). \end{aligned}$$

Chuyển qua giới hạn khi $\|\Pi\| \to 0$, ta có

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle f \rangle (T) &\leq \lim_{\|\Pi\| \to 0} \|\Pi\| \times \lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} |f'(t_k^*)|^2 \, (t_{k+1} - t_k) \\ &= \lim_{\|\Pi\| \to 0} \|\Pi\| \times \int_0^T |f'(t)|^2 \, dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\langle f \rangle (T) = 0$.

Ta có định lý sau:

Định lý 4.1.1. (Biến phân bậc hai của chuyển động Brown).

$$\langle B \rangle (T) = T,$$

hay chính xác hơn

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega;\ \langle B(\omega) \rangle (T) = T\} = 1.$$

Từ đó suy ra quỹ đạo của chuyển động Brown không khả vi hầu khắp nơi.

Chứng minh. Giả sử $\Pi = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ là một phân hoạch của đoạn $[0, T]$. Để đơn giản ký hiệu, ta đặt $D_k = B(t_{k+1}) - B(t_k)$ và

$$Q_\Pi = \sum_{k=0}^{n-1} D_k^2.$$

Khi đó ta có:

$$Q_\Pi - T = \sum_{k=0}^{n-1} \left[D_k^2 - (t_{k+1} - t_k)\right].$$

Ta sẽ chỉ ra rằng:

$$\lim_{\|\Pi\| \to 0} (Q_\Pi - T) = 0.$$

Thật vậy, với mỗi $k = 0, 1, ..., n-1$, xét số hạng

$$D_k^2 - (t_{k+1} - t_k) = [B(t_{k+1}) - B(t_k)]^2 - (t_{k+1} - t_k).$$

Mỗi số hạng này có kỳ vọng bằng 0, do vậy:

$$\mathbb{E}\,|Q_\Pi - T| = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \left[D_k^2 - (t_{k+1} - t_k)\right]\right] = 0.$$

Với $j \neq k$ các số hạng $D_j^2 - (t_{j+1} - t_j)$ và $D_k^2 - (t_{k+1} - t_k)$ độc lập, do vậy:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[Q_\Pi - T\right] &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Var}\left[D_k^2 - (t_{k+1} - t_k)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[D_k^4 - 2(t_{k+1} - t_k)D_k^2 + (t_{k+1} - t_k)^2\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left[3(t_{k+1} - t_k)^2 - 2(t_{k+1} - t_k)^2 + (t_{k+1} - t_k)^2\right] \\
&\quad (\text{do } X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2) \text{ nên } \mathbb{E}\left[X^4\right] = 3\sigma^4) \\
&= 2\sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1} - t_k)^2 \\
&\leq 2\left\|\Pi\right\| \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1} - t_k) \\
&= 2\left\|\Pi\right\| T.
\end{aligned}$$

Khi $\|\Pi\| \to 0$, $\mathrm{Var}\left[Q_\Pi - T\right] \to 0$. Vậy:

$$\lim_{\|\Pi\| \to 0} (Q_\Pi - T) = 0.$$

□

Chú ý 4.1.1. (Biểu diễn vi phân). *Ta biết rằng:*

$$\mathbb{E}\left[[B(t_{k+1}) - B(t_k)]^2 - (t_{k+1} - t_k)\right] = 0.$$

Ta lại có:

$$\mathrm{Var}\left[[B(t_{k+1}) - B(t_k)]^2 - (t_{k+1} - t_k)\right] = 2(t_{k+1} - t_k)^2.$$

Khi $(t_{k+1} - t_k)$ khá nhỏ, $(t_{k+1} - t_k)^2$ sẽ rất nhỏ; do đó

$$(B(t_{k+1}) - B(t_k))^2 \simeq (t_{k+1} - t_k),$$

và chúng ta có thể viết một cách hình thức như sau:

$$dB(t)dB(t) = dt.$$

4.1.3 Biến phân bậc hai của hai quá trình ngẫu nhiên

Định nghĩa 4.1.3. *Ta gọi biến phân bậc hai của hai quá trình ngẫu nhiên liên tục* $(X_t)_{t\geq 0}$ *và* $(Y_t)_{t\geq 0}$, *ký hiệu* $\langle X, Y\rangle$ *là một quá trình ngẫu nhiên xác định bởi giới hạn hầu chắc chắn sau đây:*

$$\langle X, Y\rangle (t) \overset{h.c.c.}{=} \lim_{\|\Pi_t\|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \left(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}\right)\left(Y_{t_{k+1}} - Y_{t_k}\right)$$

nếu giới hạn này tồn tại với mọi phân hoạch Π *của đoạn* $[0, t]$

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t.$$

Khi $X = Y$ thì $\langle X, X\rangle = \langle X\rangle$.

Từ định nghĩa dễ dàng suy ra biến phân bậc hai của hai quá trình ngẫu nhiên có một số tính chất sau:

a, $\langle X, Y\rangle (0) = 0.$

b, $\langle X, Y\rangle = \langle Y, X\rangle .$

c, $\langle a_1X_1 + a_2X_2, Y\rangle = a_1 \langle X_1, Y\rangle + a_2 \langle X_2, Y\rangle .$

4.1.4 Cấu trúc của tích phân Itô

Trong mục này, chúng ta xây dựng một loại tích phân được lấy đối với chuyển động Brown $B(t)$, $t \geq 0$, có cấu trúc như sau:

• Biến lấy tích phân là chuyển động Brown $B(t)$, cùng với bộ lọc $\mathcal{F}(t), t \geq 0$ có các tính chất:

1. $B(t)$ là $\mathcal{F}(t)$-đo được, $\forall t$;

2. Với mỗi phân hoạch: $t \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$ thì các số gia $B(t_1) - B(t)$, $B(t_2) - B(t_1), \ldots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ độc lập với $\mathcal{F}(t)$.

• Hàm lấy tích phân là $\delta(t), t \geq 0$ thỏa mãn:

1. $\delta(t)$ là $\mathcal{F}(t)$-đo được, $\forall t$ (tức là δ thích nghi);

2. $\delta(t)$ bình phương khả tích

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \delta^2(t)dt\right] < \infty, \quad \forall T.$$

Tích phân cấu trúc như trên do nhà toán học K. Itô đưa ra năm 1940 và gọi là tích phân ngẫu nhiên Itô (hay tích phân Itô), ký hiệu:

$$I(t) = \int_0^t \delta(u)dB(u), \qquad t \geq 0 .$$

Tích phân Itô cho một công cụ hữu hiệu trong tính toán ngẫu nhiên và được ứng dụng trong nhiều ngành khoa học, kỹ thuật, đặc biệt là trong toán tài chính.

Chú ý 4.1.2. *Ta biết rằng, trong Giải tích cổ điển, nếu $f(u)$ là hàm khả vi thì có thể định nghĩa*

$$\int_0^t \delta(u)df(u) = \int_0^t \delta(u)f'(u)du.$$

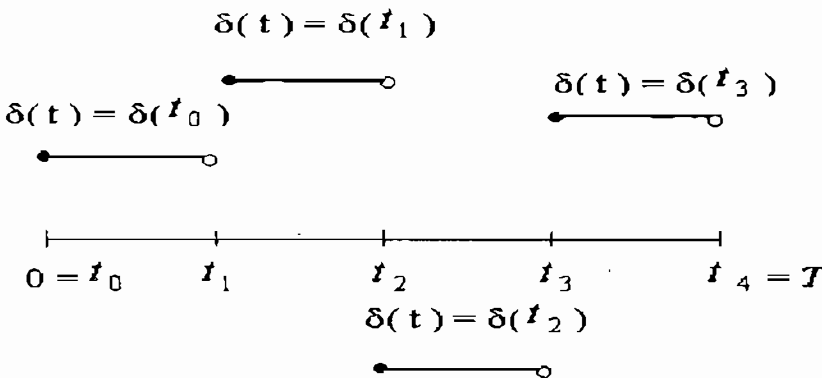
Điều này không còn đúng khi biến lấy tích phân là chuyển động Brown, bởi vì quỹ đạo của chuyển động Brown không khả vi hầu khắp nơi.

4.1.5 Tích phân Itô của hàm đơn giản

Giả sử $\Pi = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ là một phân hoạch của đoạn $[0, T]$, tức là:

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = T.$$

Giả sử hàm $\delta(t)$ luôn nhận giá trị là hằng số trên mỗi đoạn con $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, ..., n-1$, (xem hình 4.2). Khi đó, ta gọi $\delta = \delta(t)$ là một hàm đơn giản (hay quá trình đơn giản).



Hình 4.2: Một hàm đơn giản δ.

Ta có thể hình dung $B(t)$ và $\delta(t_k)$ như sau:

- $B(t)$ như là giá một đơn vị cổ phiếu của một tài sản tại thời điểm t;

- $t_0, t_1, ..., t_n$ như các ngày giao dịch của tài sản;
- $\delta(t_k)$ như là số đơn vị cổ phiếu của tài sản thu được tại ngày giao dịch t_k và giữ cho tới ngày giao dịch t_{k+1}.

Khi đó tích phân Itô $I(t)$ là lợi nhuận từ giao dịch tại thời điểm t, lợi nhuận này cho bởi:

$$I(t) = \begin{cases} \delta(t_0)[B(t) - \underbrace{B(t_0)}_{=B(0)=0}], & 0 \le t \le t_1 \\ \delta(t_0)\left[B(t_1) - B(t_0)\right] + \delta(t_1)\left[B(t) - B(t_1)\right], & t_1 \le t \le t_2 \\ \delta(t_0)\left[B(t_1) - B(t_0)\right] + \delta(t_1)\left[B(t_2) - B(t_1)\right] & \\ \qquad + \delta(t_2)\left[B(t) - B(t_2)\right], & t_2 \le t \le t_3 \\ \ldots & \end{cases}$$

Trong trường hợp tổng quát, nếu $t_k \le t \le t_{k+1}$, thì

$$I(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \delta(t_j)\left[B(t_{j+1}) - B(t_j)\right] + \delta(t_k)\left[B(t) - B(t_k)\right]. \tag{4.2}$$

4.1.6 Tính chất của tích phân Itô đối với hàm đơn giản

Từ định nghĩa, dễ dàng suy ra các tính chất sau:
Tính thích nghi. Với mỗi $t, I(t)$ là $\mathcal{F}(t)$-đo được.
Tính tuyến tính. Nếu

$$I(t) = \int_0^t \delta(u)dB(u), \qquad J(t) = \int_0^t \gamma(u)dB(u),$$

thì

$$I(t) \pm J(t) = \int_0^t \left(\delta(u) \pm \gamma(u)\right) dB(u),$$

và

$$cI(t) = \int_0^t c\delta(u)dB(u).$$

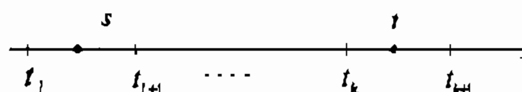
Martingale. $I(t)$ là một martingale.

Thật vậy, giả sử $\delta(t)$ là một hàm đơn giản, với phân hoạch Π đã cho, ta có định lý sau:

Định lý 4.1.2. (Tính chất martingale).

$$I(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \delta(t_j)\left[B(t_{j+1}) - B(t_j)\right] + \delta(t_k)\left[B(t) - B(t_k)\right], \qquad t_k \le t \le t_{k+1}$$

là một martingale.



Hình 4.3: Minh hoạ s và t trong các đoạn con khác nhau của phân hoạch.

Chứng minh. Giả sử đã cho $0 \le s < t$ và s, t thuộc các đoạn con khác nhau của phân hoạch Π, tức là. có các điểm phân hoạch t_l và t_k sao cho $s \in [t_l, t_{l+1}]$ và $t \in [t_k, t_{k+1}]$ (xem hình 4.3).

Ta viết tích phân $I(t)$ dưới dạng:

$$\begin{aligned} I(t) &= \sum_{j=0}^{l-1} \delta(t_j)\left[B(t_{j+1}) - B(t_j)\right] + \delta(t_l)\left[B(t_{l+1}) - B(t_l)\right] \\ &\quad + \sum_{j=l+1}^{k-1} \delta(t_j)\left[B(t_{j+1}) - B(t_j)\right] + \delta(t_k)\left[B(t) - B(t_k)\right] \end{aligned}$$

Lấy kỳ vọng các số hạng ở vế phải với điều kiện $\mathcal{F}(s)$, ta có:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{l-1} \delta(t_j)\left(B(t_{j+1}) - B(t_j)\right) \Big| \mathcal{F}(s)\right] = \sum_{j=0}^{l-1} \delta(t_j)\left(B(t_{j+1}) - B(t_j)\right);$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\delta(t_l)\left(B(t_{l+1}) - B(t_l)\right) \Big| \mathcal{F}(s)\right] &= \delta(t_l)\left(\mathbb{E}\left[B(t_{l+1}) | \mathcal{F}(s)\right] - B(t_l)\right) \\ &= \delta(t_l)\left[B(s) - B(t_l)\right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sum_{j=l+1}^{k-1}\delta(t_j)\left(B(t_{j+1})-B(t_j)\right)\Big|\mathcal{F}(s)\right]\\
&= \sum_{j=l+1}^{k-1}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\delta(t_j)\left(B(t_{j+1})-B(t_j)\right)\Big|\mathcal{F}(t_j)\right]\Big|\mathcal{F}(s)\right]\\
&= \sum_{j=l+1}^{k-1}\mathbb{E}\left[\delta(t_j)\underbrace{(\mathbb{E}\left[B(t_{j+1})|\mathcal{F}(t_j))\right]-B(t_j))}_{=0}\Big|\mathcal{F}(s)\right]\\
&= 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\delta(t_k)\left(B(t)-B(t_k)\right)\Big|\mathcal{F}(s)\right] &= \mathbb{E}\left[\delta(t_k)\underbrace{(\mathbb{E}\left[B(t)|\mathcal{F}(t_k))\right]-B(t_k))}_{=0}\Big|\mathcal{F}(s)\right]\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

$$\mathbb{E}[I(t)|\mathcal{F}(s)] = I(s), \qquad \forall \quad 0 \le s < t.$$

Điều đó chứng tỏ $I(t)$ là một martingale. □

Tính đẳng cự. Ta có định lý sau:

Định lý 4.1.3. (Tính đẳng cự Itô).

$$\mathbb{E}\left[I^2(t)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \delta^2(u)du\right].$$

Chứng minh. Để đơn giản ký hiệu, giả sử $t = t_k$, vậy

$$I(t) = \sum_{j=0}^{k}\delta(t_j)\underbrace{[B(t_{j+1})-B(t_j)]}_{D_j}.$$

Mỗi D_j có kỳ vọng 0 và các D_j khác nhau là độc lập.

$$I^2(t) = \left(\sum_{j=0}^{k}\delta(t_j)D_j\right)^2 = \sum_{j=0}^{k}\delta^2(t_j)D_j^2 + 2\sum_{i<j}\delta(t_i)\delta(t_j)D_iD_j.$$

Vì các số hạng chéo có kỳ vọng 0, nên ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[I^2(t)\right] &= \sum_{j=0}^{k}\mathbb{E}\left[\delta^2(t_j)D_j^2\right] \\
&= \sum_{j=0}^{k}\mathbb{E}\left[\delta^2(t_j)\mathbb{E}\left[(B(t_{j+1})-B(t_j))^2\,\middle|\mathcal{F}(t_j)\right]\right] \\
&= \sum_{j=0}^{k}\mathbb{E}\left[\delta^2(t_j)\left(t_{j+1}-t_j\right)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{k}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\delta^2(u)du\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^t \delta^2(u)du\right].
\end{aligned}$$

□

4.1.7 Tích phân Itô của hàm tổng quát

Cố định $T > 0$. Giả sử δ là một quá trình nào đó thoả mãn các điều kiện:

- $\delta(t)$ là $\mathcal{F}(t)$ - đo được, $\forall t \in [0,T]$,
- $\mathbb{E}\left[\int_0^T \delta^2(u)du\right] < \infty$.

Ta có định lý sau:

Định lý 4.1.4. *Có một dãy các quá trình đơn giản* $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sao cho:*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\delta_n(t)-\delta(t)\right|^2 dt\right] = 0.$$

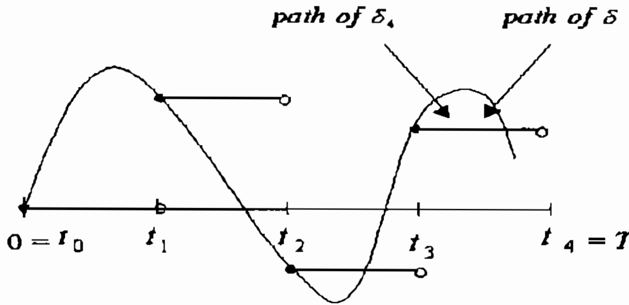
Chứng minh. Hình 4.4 chỉ ra ý tưởng chính. □

Bây giờ với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, chúng ta định nghĩa:

$$I_n(T) = \int_0^T \delta_n(t)dB(t)$$

Từ đó ta định nghĩa:

$$\int_0^T \delta(t)dB(t) = \lim_{n\to\infty}\int_0^T \delta_n(t)dB(t).$$



Hình 4.4: Xấp xỉ quá trình tổng quát bởi một quá trình đơn giản trên đoạn $[0, T]$.

Một khó khăn là chúng ta cần chỉ ra sự tồn tại của giới hạn này. Giả sử n và m là các số nguyên dương khá lớn. Khi đó:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left[I_n(T) - I_m(T)\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left[\delta_n(t) - \delta_m(t)\right] dB(t)\right]^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left[\delta_n(t) - \delta_m(t)\right]^2 dt\right] \quad \text{(Tính đẳng cự Itô)} \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left[(\delta_n(t) - \delta(t)) + (\delta(t) - \delta_m(t))\right]^2 dt\right].
\end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc: $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ trong tích phân cuối, ta có:

$$\operatorname{Var}\left[I_n(T) - I_m(T)\right] \leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^T |\delta_n(t) - \delta(t)|^2 dt\right] + 2\mathbb{E}\left[\int_0^T |\delta(t_m) - \delta(t)|^2 dt\right].$$

Khi $n \to \infty$ tổng ở vế phải dần tới 0 (theo định lý 4.1.4). Điều này bảo đảm rằng dãy $\{I_n(T)\}_{n=1}^{\infty}$ có giới hạn.

4.1.8 Tính chất của tích phân Itô (tổng quát)

Xét tích phân:

$$I(t) = \int_0^t \delta(u) dB(u)$$

trong đó δ là quá trình thích nghi, khả tích bậc hai. Từ định nghĩa dễ dàng chỉ ra các tính chất sau:

Tính thích nghi: Với mỗi $t, I(t)$ là $\mathcal{F}(t)$-đo được.
Tính tuyến tính: Nếu

$$I(t) = \int_0^t \delta(u)dB(u), \qquad J(t) = \int_0^t \gamma(u)dB(u),$$

thì

$$I(t) \pm J(t) = \int_0^t (\delta(u) \pm \gamma(u))\, dB(u),$$

và

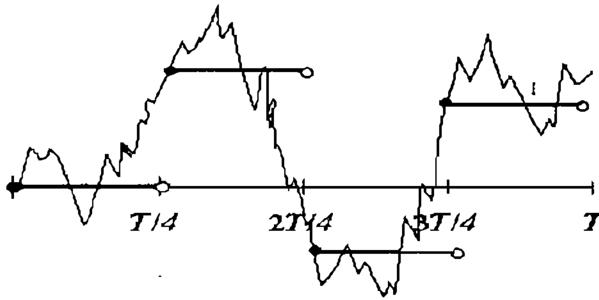
$$cI(t) = \int_0^t c\delta(u)dB(u).$$

Tính chất martingale: $I(t)$ là một martingale.
Tính liên tục: $I(t)$ là hàm liên tục của t.
Tính đẳng cự Itô: $\mathbb{E}[I^2(t)] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \delta^2(u)du\right]$.

Ví dụ 4.1.4. Xét tích phân Itô:

$$\int_0^T B(u)dB(u).$$

Ta xấp xỉ tích phân như chỉ ra trong hình 4.5



Hình 4.5: Xấp xỉ tích phân $B(u)$ với δ_4 trên $[0, T]$.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có

$$\delta_n(u) = \begin{cases} B(0) = 0 & 0 \leq u < T/n; \\ B(T/n) & T/n \leq u < 2T/n; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ B\left(\frac{(n-1)T}{T}\right) & \frac{(n-1)T}{n} \leq u < T. \end{cases}$$

Theo định nghĩa

$$\int_0^T B(u)dB(u) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} B\left(\frac{kT}{n}\right)\left[B\left(\frac{(k+1)T}{n}\right) - B\left(\frac{kT}{n}\right)\right].$$

Để đơn giản ký hiệu, ta viết $B_k \triangleq B\left(\frac{kT}{n}\right)$. Từ đó ta có:

$$\int_0^T B(u)dB(u) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} B_k\left(B_{k+1} - B_k\right).$$

Ta lại có:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(B_{k+1} - B_k\right)^2 &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} B_{k+1}^2 - \sum_{k=0}^{n-1} B_k B_{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} B_k^2 \\
&= \frac{1}{2}B_n^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} B_j^2 - \sum_{k=0}^{n-1} B_k B_{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} B_k^2 \\
&= \frac{1}{2}B_n^2 + \sum_{k=0}^{n-1} B_k^2 - \sum_{k=0}^{n-1} B_k B_{k+1} \\
&= \frac{1}{2}B_n^2 - \sum_{k=0}^{n-1} B_k\left(B_{k+1} - B_k\right).
\end{aligned}$$

Vì thế cho nên:

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_k\left(B_{k+1} - B_k\right) = \frac{1}{2}B_n^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(B_{k+1} - B_k\right)^2,$$

hoặc tương đương:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1} B\left(\frac{kT}{n}\right)\left[B\left(\frac{(k+1)T}{n}\right) - B\left(\frac{kT}{n}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}B^2(T) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left[B\left(\frac{(k+1)T}{n}\right)\left(\frac{k}{T}\right)\right]^2.
\end{aligned}$$

Cho $n \to \infty$ và sử dụng định nghĩa của biến phân bậc hai ta nhận được:

$$\int_0^T B(u)dB(u) = \frac{1}{2}B^2(T) - \frac{1}{2}T.$$

Chú ý 4.1.3. (Lý do xuất hiện số hạng $\frac{1}{2}T$). *Nếu f là khả vi với $f(0) = 0$ thì*

$$\begin{aligned}\int_0^T f(u)df(u) &= \int_0^T f(u)f'(u)du \\ &= \frac{1}{2}f^2(u)\Big|_0^T \\ &= \frac{1}{2}f^2(T).\end{aligned}$$

Ngược lại, với chuyển động Brown, ta có:

$$\int_0^T B(u)dB(u) = \frac{1}{2}B^2(T) - \frac{1}{2}T.$$

Số hạng thêm vào $\frac{1}{2}T$ do biến phân bậc hai của chuyển động Brown khác không. Nó cần phải có mặt ở đó, bởi vì:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T B(u)dB(u)\right] = 0 \qquad \textit{(Tích phân Itô là một martingale)}$$

nhưng

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{2}B^2(T)\right] = \frac{1}{2}T.$$

4.1.9 Biến phân bậc hai của một tích phân Itô

Định lý 4.1.5. (Biến phân bậc hai của tích phân Itô). *Giả sử:*

$$I(t) = \int_0^t \delta(u)\, dB(u).$$

Khi đó:

$$\langle I\rangle(t) = \int_0^t \delta^2(u)\, du.$$

Điều này thu được ngay cả khi δ không là một quá trình cơ bản. Công thức biến phân bậc hai nói rằng, tại mỗi thời điểm u, độ biến động tuyệt đối tức

thời của $I(t)$ là $\delta^2(u)$. Một cách hình thức, chúng ta có thể viết công thức biến phân bậc hai dưới dạng vi phân như sau:

$$dI(t)\,dI(t) = \delta^2(u)\,dt.$$

Trong trường hợp $\delta(u) = 1$ ta thấy lại công thức đã biết trong mục trước

$$dB(t)\,dB(t) = dt.$$

Chứng minh. (Với một quá trình cơ bản δ) Giả sử $\Pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ là phân hoạch của đoạn $[0,t]$, sao cho $\delta(u) = \delta(t_k)$ với $t_k \le u \le t_{k+1}$. Khi đó $t = t_n$ và ta có:

$$\langle I\rangle(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\left[\langle I\rangle(t_{k+1}) - \langle I\rangle(t_k)\right].$$

Với mỗi $k = 0, 1, \ldots, n-1$, ta tính $\langle I\rangle(t_{k+1}) - \langle I\rangle(t_k)$. Đặt $\Xi = \{s_0, s_1, \ldots, s_m\}$ là một phân hoạch của đoạn $[t_{k-1}, t_k]$

$$t_k = s_0 \le s_1 \le \ldots \le s_m = t_{k+1},$$

khi đó:

$$I(s_{j+1}) - I(s_j) = \int_{s_j}^{s_{j+1}} \delta(t_k)\,dB(u) = \delta(t_k)\left[B(s_{j+1}) - B(s_j)\right].$$

Vậy

$$\begin{aligned}
\langle I\rangle(t_{k+1}) - \langle I\rangle(t_k) &= \sum_{j=0}^{m-1}\left[I(s_{j+1}) - I(s_j)\right]^2 \\
&= \delta^2(t_k)\sum_{j=0}^{m-1}\left[B(s_{j+1}) - B(s_j)\right]^2 \\
&\xrightarrow{\|\Xi\|\to 0} \delta^2(t_k)(t_{k+1} - t_k).
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned}
\langle I\rangle(t) &= \sum_{j=0}^{n-1}\delta^2(t_k)(t_{k+1} - t_k) = \sum_{j=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\delta^2(u)\,du \\
&\xrightarrow{\|\Xi\|\to 0} \int_0^t \delta^2(u)\,du.
\end{aligned}$$

□

Chú ý 4.1.4. *Nếu X và Y là hai quá trình Itô cho bởi:*

$$X = X_0 + \int_0^t h_1(s,\omega)ds + \int_0^t f_1(s,\omega)dB(s),$$
$$Y = Y_0 + \int_0^t h_2(s,\omega)ds + \int_0^t f_2(s,\omega)dB(s)$$

thì

$$\langle X, Y\rangle (t) = \int_0^t f_1(s,\omega)f_2(s,\omega)ds.$$

4.2 Công thức Itô

4.2.1 Công thức Itô một chiều

Trong mục này ta tìm một công thức "vi phân" cho $f(B(t))$, ở đó $f(x)$ là một hàm khả vi. Nếu $B(t)$ cũng khả vi thì công thức vi phân của hàm hợp thông thường cho ta:

$$\frac{d}{dt}f(B(t)) = f'(B(t))B'(t),$$

hay viết dưới dạng vi phân như sau:

$$\begin{aligned} df(B(t)) &= f'(B(t))B'(t)dt \\ &= f'(B(t))dB(t) \end{aligned}$$

Tuy nhiên, $B(t)$ là không khả vi, và trong thực tế nó có biến phân bậc hai khác không, vì vậy, biểu diễn chính xác vi phân $df(B(t))$ có thêm một số hạng dạng:

$$df(B(t)) = f'(B(t))dB(t) + \frac{1}{2}f''(B(t))\underbrace{dt}_{dB(t)dB(t)}. \tag{4.3}$$

Công thức trên gọi là công thức Itô dạng vi phân (sự tồn tại của số hạng thêm vào sẽ được giải thích trong các mục sau). Để có một cái nhìn tổng quát, trước tiên ta tìm hiểu khái niệm vi phân Itô:

Định nghĩa 4.2.1. (Vi phân Itô). *Giả sử $X = (X_t)$, $t \geq 0$ là một quá trình ngẫu nhiên sao cho:*

(a) Hầu hết các quỹ đạo $t \to X_t$ là liên tục,
(b) Hầu chắc chắn X_t có biểu diễn:

$$X_t = X_0 + \int_0^t h(t,\omega)ds + \int_0^t f(s,\omega)dB_s \tag{4.4}$$

trong đó h và f là các quá trình ngẫu nhiên đo được dần sao cho các tích phân trong biểu diễn tồn tại thì ta nói rằng X là một quá trình Itô và có vi phân Itô dX.

Vi phân Itô dX là một biểu thức hình thức được viết như sau:

$$dX_t = h(t,\omega)dt + f(t,\omega)dB_t \tag{4.5}$$

$$hay \qquad dX = hdt + fdB.$$

Chú ý 4.2.1. *(a) Khi ta viết một vi phân có dạng (4.5), ta hiểu rằng điều đó có nghĩa là ta có hệ thức (4.4) hầu chắc chắn.*
(b) Trong khi thực hiện các tính toán trên các vi phân, ta có thể áp dụng các qui tắc sau:

$$dt.dt = 0, \; dt.dB = dB.dt = 0, \; dB.dB = dt.$$

Người ta đã chứng minh được định lý sau (xem tài liệu [6]):

Định lý 4.2.1. (Công thức Itô một chiều). *Cho X là một quá trình Itô với $dX = hdt + fdB$. Giả thử $g(t,x) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ là một hàm hai biến khả vi liên tục cấp 1 theo biến thứ nhất t, khả vi liên tục cấp 2 theo biến thứ hai x. Khi đó quá trình ngẫu nhiên $Y_t = g(t,X_t)$ là một quá trình Itô có vi phân Itô cho bởi:*

$$(I_1) \qquad dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,X_t)f^2(t,\omega)dt. \tag{4.6}$$

hoặc dạng tương đương sau:

$$(I_2) \quad Y_t = g(0,X_0) + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s,X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}(s,X_s)f^2(s,\omega)ds. \tag{4.7}$$

Công thức Itô thực chất là một công thức đổi biến trong Giải tích ngẫu nhiên: Từ một quá trình ngẫu nhiên Itô (X_t) nếu ta biến đổi thành (Y_t) với $Y_t = g(t,X_t)$ thì vi phân dY sẽ tính theo công thức (4.6). Công thức này rất cần thiết để tính tích phân ngẫu nhiên, thực hiện các phép biến đổi ngẫu nhiên và giải các phương trình vi phân ngẫu nhiên.

Chú ý 4.2.2. *(a) Trong các công thức* (I_1) *và* (I_2) *thì* dX *coi như đã biết, và ta có thể thay* $dX = hdt + fdB$.
(b) Trong trường hợp $f(t,\omega) = f(B_t)$ *thì công thức Itô (4.7) có thể viết dưới dạng đơn giản như sau:*

$$f(B(t)) - f(B(0)) = \int_0^t f'(B(u))\,dB(u) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B(u))\,du. \qquad (4.8)$$

Trong vế phải của (4.8), tích phân thứ nhất

$$\int_0^t f'(B(u))\,dB(u)$$

là một tích phân Itô đã xác định trong mục trước, tích phân thứ hai

$$\int_0^t f''(B(u))\,du,$$

là một tích phân Riemann quen thuộc trong giải tích cổ điển.

Ví dụ 4.2.1. Tính tích phân $I = \int_0^t B_s dB_s$.
Giải: Chọn $X_t = B_t$ và $g(t,x) = x^2$. Khi đó:

$$Y_t = g(t, X_t) = g(t, B_t) = B_t^2$$
$$g(t,x) = x^2 \;\Rightarrow\; \frac{\partial g}{\partial t} = 0,\; \frac{\partial g}{\partial x} = 2x,\; \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2.$$

Ngoài ra, vì $X_t = B_t = \int_0^t 1.dB_s$ cho nên f ở đây bằng 1; áp dụng công thức Itô (I_2) ta được:

$$Y_t = B_t^2 = \int_0^t 2B_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2.ds = 2\int_0^t B_s dB_s + t.$$

Do đó:

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{t}{2}.$$

Ví dụ 4.2.2. Tính tích phân $I = \int_0^t f(s)dB_s$ trong đó f là một hàm tất định, khả vi cấp 1.
Giải: Chọn $g(t,x) = f(t).x$, do đó $Y_t = f(t)X_t = f(t)B_t$.

$$\frac{\partial g}{\partial t} = f'(t).x \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = f(t) \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0.$$

Theo công thức Itô (I_1), ta có

$$dY_t = f'(t)X_tdt + f(t)dX_t + 0$$

hay là

$$d[f(t)B_t] = B_tdf(t) + f(t)dB_t.$$

Vậy:

$$\int_0^t f(s)dB_s = f(t)B_t - \int_0^t B_sdf(s).$$

Đó là công thức tích phân từng phần của tích phân ngẫu nhiên Itô trong trường hợp hàm dưới dấu tích phân là tất định.

Chú ý rằng, theo giả thiết f là khả vi nên nó có biến phân giới nội trên đoạn $[0, t]$ và do đó tích phân $\int_0^t B_sdf(s)$ là có nghĩa. Trong trường hợp tổng quát, nếu $f(t, \omega)$ là một quá trình ngẫu nhiên với quỹ đạo có biến phân giới nội, thì ta có công thức tích phân từng phần sau:

$$\int_0^t f(s,\omega)dB_s = f(t,\omega)B_t - \int_0^t B_sdf(s) - \langle f, B\rangle(t),$$

trong đó $\langle f, B\rangle(t)$ là biến phân bậc hai của quá trình f và B.

4.2.2 Nguồn gốc của công thức Itô

Xét hàm $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, ta có:

$$f'(x) = x, \quad f''(x) = 1.$$

Giả sử x_k, x_{k+1} là các số thực. Theo công thức Taylor, ta có:

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = (x_k - x_{k+1}) f'(x) + \frac{1}{2}(x_k - x_{k+1})^2 f''(x_k) \qquad (4.9)$$

(trong trường hợp này, công thức Taylor tới bậc hai là chính xác vì f là một hàm bậc hai). Trong trường hợp tổng quát, phương trình (4.9) chỉ là xấp xỉ, và sai số là luỹ thừa của $(x_k - x_{k+1})^3$. Tuy nhiên, tổng sai số sẽ có dần tới 0 khi $||\Pi|| \to 0$.

Bây giờ cố định $T > 0$ và giả sử $\Pi = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ là một phân hoạch của $[0, T]$. Sử dụng công thức Taylor, ta có:

$$\begin{aligned}
& f(B(T)) - f(B(0)) \\
= \;& \frac{1}{2}B^2(T) - \frac{1}{2}B^2(0) \\
= \;& \sum_{k=0}^{n-1} [f(B(t_{k+1}) - B(t_k))] \\
= \;& \sum_{k=0}^{n-1} [B(t_{k+1}) - B(t_k)] f'(B(t_k)) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} [B(t_{k+1}) - B(t_k)]^2 f''(B(t_k)) \\
= \;& \sum_{k=0}^{n-1} B(t_k)[B(t_{k+1}) - B(t_k)] + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} [B(t_{k+1}) - B(t_k)]^2 .
\end{aligned}$$

Cho $\|\Pi\| \to 0$ ta thu được:

$$\begin{aligned}
f(B(T)) - f(B(0)) &= \int_0^T B(u)\, dB(u) + \frac{1}{2}\underbrace{\langle B\rangle(T)}_{T} \\
&= \int_0^T f'(B(u))dB(u) + \frac{1}{2}\int_0^T \underbrace{f''(B(u))}_{1}du.
\end{aligned}$$

Đây là công thức Itô dạng tích phân cho trường hợp đặc biệt:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

4.2.3 Chuyển động Brown hình học

Định nghĩa 4.2.2. (Chuyển động Brown hình học). *Chuyển động Brown hình học là quá trình có dạng:*

$$S(t) = S(0)\exp\left\{\sigma B(t) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right\},$$

trong đó μ và $\sigma > 0$ là các hằng số.

Đặt:

$$f(t,x) = S(0)\exp\left\{\sigma x + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right\},$$

ta có:

$$S(t) = f(t, B(t)).$$

Ta lại có:

$$f_t' = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)f, \quad f_x' = \sigma f, \quad f_{xx}'' = \sigma^2 f.$$

Áp dụng công thức Itô, ta được:

$$\begin{aligned} dS(t) &= df(t, B(t)) \\ &= f_t' dt + f_x' dB + \frac{1}{2} f_{xx}'' \underbrace{dBdB}_{dt} \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) f dt + \sigma f dB + \frac{1}{2}\sigma^2 f dt \\ &= \mu S(t)\, dt + \sigma S(t)\, dB(t). \end{aligned}$$

Vì thế cho nên, dạng vi phân của chuyển động Brown hình học là:

$$dS(t) = \mu S(t)\, dt + \sigma S(t)\, dB(t),$$

và dạng tích phân của chuyển động Brown hình học là:

$$S(t) = S(0) + \int_0^t \mu S(u)\, du + \int_0^t \sigma S(u)\, dB(u).$$

4.2.4 Biến phân bậc hai của chuyển động Brown hình học

Trong dạng tích phân của chuyển động Brown hình học:

$$S(t) = S(0) + \int_0^t \mu S(u)\, du + \int_0^t \sigma S(u)\, dB(u),$$

tích phân Riemann

$$F(t) = \int_0^t \mu S(u)\, du$$

là khả vi với $F'(t) = \mu S(t)$, do đó số hạng này có biến phân bậc hai bằng không. Tích phân Itô

$$G(t) = \int_0^t \sigma S(u)\, dB(u)$$

không khả vi và nó có biến phân bậc hai

$$\langle G\rangle(t) = \int_0^t \sigma^2 S^2(u)\, du.$$

Vì thế, biến phân bậc hai của S là cho bởi biến phân bậc hai của G. Trong ký hiệu vi phân, chúng ta viết:

$$dS(t)\, dS(t) = (\mu S(t)\, dt + \sigma S(t)\, dB(t))^2 = \sigma^2 S^2(t)\, dt.$$

Chú ý 4.2.3. (Độ biến động của chuyển động Brown hình học). *Giả sử ta cố định $0 \leq T_1 \leq T_2$ và $\Pi = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ là một phân hoạch của $[T_1, T_2]$. Độ biến động tuyệt đối bậc hai của S trên $[T_1, T_2]$ là:*

$$\begin{aligned}\frac{1}{T_1 - T_2}\sum_{k=0}^{n-1}[S(t_{k+1}) - s(t_k)]^2 &\simeq \frac{1}{T_1 - T_2}\int_{T_1}^{T_2}\sigma^2 S^2(u)\, du \\ &\simeq \sigma^2 S^2(T_1).\end{aligned}$$

Khi $T_2 \downarrow T_1$, xấp xỉ trên trở thành chính xác. Nói cách khác, độ biến động tức thời của S là σ^2. Đây cũng thường được gọi là độ biến động đơn giản của S.

4.2.5 Nguồn gốc của công thức Black-Scholes

Tài sản của một người đầu tư. Giả sử một người đầu tư bắt đầu với tài sản ban đầu không ngẫu nhiên X_0 và tại mỗi thời điểm t sở hữu $\Delta(t)$ cổ phiếu. Giá cổ phiếu được mô hình bởi một chuyển động Brown hình học:

$$dS(t) = \mu S(t)\, dt + \sigma S(t)\, dB(t).$$

$\Delta(t)$ có thể ngẫu nhiên, nhưng cần phải thích nghi. Người đầu tư thực hiện việc đầu tư của ông ta bằng cách vay hoặc cho vay với lãi suất r.

Ký hiệu $X(t)$ là tài sản của người đầu tư tại thời điểm t, ta có:

$$X(t) = \Delta(t)\, S(t) + r[X(t) - \Delta(t)\, S(t)].$$

Do đó:

$$\begin{aligned} dX(t) &= \Delta(t)\,dS(t) + r\left[X(t) - \Delta(t)\,S(t)\right]dt \\ &= \Delta(t)\left[\mu S(t)\,dt + \sigma S(t)\,dB(t)\right] + r\left[X(t) - \Delta(t)\,S(t)\right]dt \\ &= rX(t)\,dt + \Delta(t)\,S(t)\underbrace{(\mu - r)}_{\text{Phần bù rủi ro}}dt + \Delta(t)\,S(t)\,\sigma dB(t). \end{aligned}$$

Giá trị của một quyền chọn. Xét một quyền chọn kiểu Âu mà trả $g(S(T))$ tại thời điểm T. Ký hiệu $v(t,x)$ là giá trị của quyền chọn này tại thời điểm t nếu giá cổ phiếu là $S(t) = x$. Nói cách khác, giá trị của quyền chọn tại mỗi thời điểm $t \in [0,T]$ là:

$$v(t, S(t)).$$

Vi phân của giá trị này là:

$$\begin{aligned} dv(t,S(t)) &= v_t' dt + v_x' dS + \frac{1}{2}v_{xx}'' dSdS \\ &= v_t' dt + v_x'\left[\mu S dt + \sigma S dB\right] + \frac{1}{2}v_{xx}''\sigma^2 S^2 dt \\ &= \left[v_t' + \mu S v_x' + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 v_{xx}''\right]dt + \sigma S v_x' dB. \end{aligned}$$

Một danh mục đầu tư có phòng hộ bắt đầu với tài sản ban đầu X_0 nào đó và đầu tư để nhận được tài sản $X(t)$ tại mỗi thời điểm t. Từ trên ta có:

$$dX(t) = \left[rX + \Delta(\mu - r)S\right]dt + \sigma S \Delta dB.$$

Để bảo đảm rằng $X(t) = v(t, S(t))$ với mọi t, ta cân bằng hệ số các vi phân của chúng. Cân bằng các hệ số dB ta thu được công thức Δ-hedging:

$$\Delta(t) = v_x'(t, S(t)).$$

Cân bằng các hệ số dt, ta thu được:

$$v_t' + \mu S v_x' + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 v_{xx}'' = rX + \Delta(\mu - r)S.$$

Nhưng ta đã đặt $\Delta = v_x'$ và ta đang tìm kiếm nguyên nhân X bằng với v. Kết hợp các phương trình này ta thu được:

$$v_t' + \mu S v_x' + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 v_{xx}'' = rv + v_x'(\mu - r)S,$$

(ở đó $v = v(t, S(t))$ và $S = S(t)$). Từ đó suy ra:

$$v'_t + rSv'_x + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 v''_{xx} = rv.$$

Vậy, giả sử v là nghiệm của phương trình đạo hàm riêng Black-Scholes:

$$v_t(t,x) + rxSv'_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v''_{xx}(t,x) = rv(t,x)$$

thoả mãn điều kiện ban đầu:

$$v(T,x) = y(x)$$

thì một người đầu tư bắt đầu với $X_0 = v(0, S(0))$ và sử dụng phòng hộ $\Delta(t) = v'_x(t, S(t))$ sẽ có tài sản $X(t) = v(t, S(t))$ với mọi t, trong thực tế $X(T) = g(S(T))$.

4.2.6 Trung bình và phương sai của quá trình Cox-Ingersoll-Ross

Cox-Ingersoll-Ross đưa ra mô hình ngẫu nhiên cho động học của lãi suất $r(t)$ bởi phương trình sau:

$$dr(t) = a(b - cr(t))\,dt + \sigma\sqrt{r(t)}dB(t), \tag{4.10}$$

trong đó a, b, c, σ và $r(0)$ là các hằng số dương và $B(t)$ là một chuyển động Brown. Dạng tích phân của phương trình này là:

$$r(t) = r(0) + a\int_0^t (b - cr(u))\,du + \sigma\int_0^t \sqrt{r(u)}dB(u).$$

Áp dụng công thức Itô để tính $dr^2(t) = df(r(t))$, với $f(x) = x^2$, ta được:

$$\begin{aligned}
dr^2(t) &= df(r(t)) \\
&= f'(r(t))\,dr(t) + \frac{1}{2}f''(r(t))\,dr(t)\,dr(t) \\
&= 2r(t)\left[a(b - cr(t))\,dt + \sigma\sqrt{r(t)}dB(t)\right] \\
&\quad + \left[a(b - cr(t))\,dt + \sigma\sqrt{r(t)}dB(t)\right]^2 \\
&= 2abr(t)\,dt - 2acr^2(t)\,dt + 2\sigma r^{\frac{3}{2}}(t)\,dB(t) + \sigma^2 r(t)\,dt \\
&= \left(2ab + \sigma^2\right)r(t)\,dt - 2acr^2(t)\,dt + 2\sigma r^{\frac{3}{2}}(t)\,dB(t).
\end{aligned}$$

Trung bình của $r(t)$. Dạng tích phân của phương trình (4.10) là:

$$r(t) = r(0) + a\int_0^t (b - cr(u))\,du + \sigma\int_o^t \sqrt{r(u)}dB(u).$$

Lấy kỳ vọng hai vế và lưu ý rằng kỳ vọng của một tích phân Itô bằng không, ta thu được:

$$\mathbb{E}[r(t)] = r(0) + a\int_0^t (b - c\mathbb{E}[r(u)])\,du.$$

Đạo hàm hai vế cho ta:

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}[r(t)] = a(b - c\mathbb{E}[r(t)]) = ab - c\mathbb{E}[r(t)],$$

từ đó suy ra:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{act}\mathbb{E}[r(t)]\right] = e^{act}\left[ac\mathbb{E}[r(t)] + \frac{d}{dt}\mathbb{E}[r(t)]\right] = e^{act}ab.$$

Tích phân hai vế cho ta:

$$e^{act}\mathbb{E}[r(t)] - r(0) = ab\int_0^t e^{acu}du = \frac{b}{c}\left(e^{act} - 2\right).$$

Ta giải với $\mathbb{E}[r(t)]$:

$$\mathbb{E}[r(t)] = \frac{b}{c} + e^{-act}\left(r(0) - \frac{b}{c}\right).$$

Nếu $r(0) = \frac{b}{c}$ thì $\mathbb{E}[r(t)] = \frac{b}{c}$ với mọi t. Nếu $r(0) \neq \frac{b}{c}$ thì $r(t)$ thoả mãn

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[r(t)] = \frac{b}{c}.$$

Phương sai của $r(t)$. Từ dạng tích phân của phương trình ta có:

$$r^2(t) = r^2(0) + \left(2ab + \sigma^2\right)\int_0^t r(u)\,du - 2ac\int_o^t r^2(u)\,du + 2\sigma\int_0^t r^{\frac{3}{2}}(u)\,dB(u).$$

Lấy kỳ vọng hai vế, ta thu được:

$$\mathbb{E}[r^2(t)] = r^2(0) + \left(2ab + \sigma^2\right)\int_0^t \mathbb{E}[r(u)]du - 2ac\int_o^t \mathbb{E}[r^2(u)]du.$$

Đạo hàm cho ta:

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}[r^2(t)] = \left(2ab + \sigma^2\right)\mathbb{E}[r(t)] - 2ac\mathbb{E}[r^2(t)],$$

suy ra

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{2act}\mathbb{E}[r^2(t)] &= e^{2act}\left[2ac\mathbb{E}[r^2(t)] + \frac{d}{dt}\mathbb{E}[r^2(t)]\right] \\ &= e^{2act}\left(2ab + \sigma^2\right)\mathbb{E}[r(t)].\end{aligned}$$

Sử dụng công thức tính $\mathbb{E}[r(t)]$ và tích phân phương trình cuối, ta thu được:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[r^2(t)] &= \frac{b\sigma^2}{2ac^2} + \frac{b^2}{c^2} + \left(r(0) - \frac{b}{c}\right)\left(\frac{\sigma^2}{ac} + \frac{2b}{c}\right)e^{-act} \\ &+ \left(r(0) - \frac{b}{c}\right)\frac{\sigma^2}{ac}e^{-2act} + \frac{\sigma^2}{ac}\left(\frac{b}{2c} - r(0)\right)e^{-2act}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[r(t)] &= \mathbb{E}[r^2(t)] - (\mathbb{E}[r(t)])^2 \\ &= \frac{b\sigma^2}{2ac^2} + \left(r(0) - \frac{b}{c}\right)\frac{\sigma^2}{ac}e^{-2act} + \frac{\sigma^2}{ac}\left(\frac{b}{2c} - r(0)\right)e^{-2act}.\end{aligned}$$

4.2.7 Chuyển động Brown nhiều chiều

Định nghĩa 4.2.3. (Chuyển động Brown d chiều). *Một chuyển động Brown d chiều là một quá trình ngẫu nhiên*

$$B(t) = (B_1(t), ..., B_d(t))$$

với các tính chất sau:

- *Mỗi $1 \le i \le d$, $B_i(t)$ là một chuyển động Brown;*
- *Nếu $i \neq j$ thì các quá trình $B_i(t)$ và $B_j(t)$ độc lập.*

Cùng với một chuyển động Brown d chiều, ta có một bộ lọc $\{\mathcal{F}(t)\}_{t\ge 0}$ sao cho

- Với mỗi t véc tơ ngẫu nhiên $B(t)$ là $\mathcal{F}(t)$-đo được;
- Với mỗi $t \le t_1 \le ... \le t_n$ các véc tơ số gia

  $$B(t_1) - B(t), ..., B(t_n) - B(t_{n-1})$$

  là độc lập với $\mathcal{F}(t)$.

4.2.8 Biến phân chéo của các chuyển động Brown

Xét một chuyển động Brown d-chiều $B(t) = (B_1(t), ..., B_d(t))$. Vì mỗi thành phần B_i là một chuyển động Brown một chiều, ta có phương trình hình thức:

$$dB_i(t)\,dB_i(t) = dt.$$

Tuy nhiên, ta có:

Định lý 4.2.2. *Nếu $i \neq j$,*

$$dB_i(t)\,dB_j(t) = 0.$$

Chứng minh. Giả sử $\Pi = \{t_0, ..., t_n\}$ là một phân hoạch của $[0, T]$. Với $i \neq j$, ta xác định biến phân chéo của B_i và B_j trên $[0, T]$ là:

$$C_\Pi = \sum_{k=0}^{n-1} [B_i(t_{k+1}) - B_i(t_k)][B_j(t_{k+1}) - B_j(t_k)].$$

Các số gia xuất hiện trên vế phải của phương trình trên luôn độc lập với một trong chúng và có trung bình bằng 0. Vì thế cho nên:

$$\mathbb{E}[C_\Pi] = 0.$$

Ta tính $\mathrm{Var}[C_\Pi]$. Trước tiên, nhận thấy rằng:

$$\begin{aligned} C_\Pi^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} [B_i(t_{k+1}) - B_i(t_k)]^2 [B_j(t_{k+1}) - B_j(t_k)]^2 \\ &+ \sum_{l<k}^{n-1} \{[B_i(t_{l+1}) - B_i(t_l)][B_j(t_{l+1}) - B_j(t_l)] \\ &\times [B_i(t_{k+1}) - B_i(t_k)][B_j(t_{k+1}) - B_j(t_k)]\}. \end{aligned}$$

Tất cả các số gia xuất hiện trong tổng của các số hạng chéo là độc lập với một trong chúng và có trung bình bằng 0. Vì thế cho nên:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[C_\Pi] &= \mathbb{E}[C_\Pi^2] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n-1} [B_i(t_{k+1}) - B_i(t_k)]^2 [B_j(t_{k+1}) - B_j(t_k)]^2\right]. \end{aligned}$$

Nhưng $[B_i(t_{k+1}) - B_i(t_k)]^2$ và $[B_j(t_{k+1}) - B_j(t_k)]^2$ độc lập với một trong chúng và mỗi số hạng có kỳ vọng $(t_{k+1} - t_k)$. Điều đó suy ra rằng

$$\text{Var}[C_\Pi] = \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k)^2 \le \|\Pi\| \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) = \|\Pi\| .T.$$

Khi $\|\Pi\| \to 0$ thì $\text{Var}[C_\Pi] \to 0$, vì vậy C_Π hội tụ tới hằng số $\mathbb{E}[C_\Pi] = 0$. □

4.2.9 Công thức Itô nhiều chiều

Trước tiên, để đơn giản, ta xây dựng công thức Itô cho hai quá trình điều khiển bởi chuyển động Brown 2-chiều.

Giả sử X và Y là các quá trình có dạng

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \alpha(u)\,du + \int_0^t \delta_{11}(u)\,dB_1(u) + \int_0^t \delta_{12}(u)\,dB_2(u),$$

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \beta(u)\,du + \int_0^t \delta_{21}(u)\,dB_1(u) + \int_0^t \delta_{22}(u)\,dB_2(u).$$

Mỗi quá trình bao gồm một điều kiện ban đầu không ngẫu nhiên, cộng thêm một tích phân Riemann, cộng một hoặc nhiều tích phân Itô, được gọi là các semimartingale. Các hàm dưới dấu tích phân $\alpha(u), \beta(u)$ và $\delta_{ij}(u)$ có thể là quá trình thích nghi bất kỳ. Tính thích nghi của các hàm dưới dấu tích phân bảo đảm rằng X và Y cũng thích nghi. Dưới dạng vi phân, ta viết:

$$dX = \alpha dt + \delta_{11}dB_1 + \delta_{12}dB_2,$$

$$dY = \beta dt + \delta_{21}dB_1 + \delta_{22}dB_2.$$

Với hai semimartingale X và Y này, các biến phân bậc hai và chéo là:

$$\begin{aligned}
dXdX &= (\alpha dt + \delta_{11}dB_1 + \delta_{12}dB_2)^2, \\
&= \delta_{11}^2 \underbrace{dB_1dB_1}_{dt} + 2\delta_{11}\delta_{12}\underbrace{dB_1dB_2}_{0} + \delta_{12}^2\underbrace{dB_2dB_2}_{dt} \\
&= \left(\delta_{11}^2 + \delta_{12}^2\right)^2 dt, \\
dYdY &= (\beta dt + \delta_{21}dB_1 + \delta_{22}dB_2)^2 \\
&= \left(\delta_{21}^2 + \delta_{22}^2\right)^2 dt, \\
dXdY &= (\alpha dt + \delta_{11}dB_1 + \delta_{12}dB_2)(\beta dt + \delta_{21}dB_1 + \delta_{22}dB_2) \\
&= (\delta_{11}\delta_{21} + \delta_{12}\delta_{22})\, dt.
\end{aligned}$$

Giả sử $g(t,x,y)$ là một hàm của ba biến, và giả sử $X(t)$ và $Y(t)$ là các semimartingale. Khi đó ta có công thức Itô:

$$g(t,x,y) = g'_t dt + g'_x dX + g'_y dY + \frac{1}{2}\left[g''_{xx} dXdX + 2g''_{xy} dXdY + g''_{yy} dYdY\right].$$

Dưới dạng tích phân, công thức này có dạng:

$$g(t,X(t),Y(t)) - g(0,X(0),Y(0)) = \int_0^t \Big[g'_t + \alpha g'_x + \beta g'_y +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\delta_{11}^2 + \delta_{12}^2\right) g''_{xx} + \left(\delta_{11}\delta_{21} + \delta_{12}\delta_{22}\right) g''_{xy} + \left(\delta_{21}^2 + \delta_{22}^2\right) g''_{yy}\Big] du$$
$$+\int_0^t \left[\delta_{11} g'_x + \delta_{21} g'_y\right] dB_1 + \int_0^t \left[\delta_{12} g'_x + \delta_{22} g'_y\right] dB_2,$$

trong đó $f = f(u, X(u), Y(u))$ với mọi $i,j \in \{1,2\}$, $\delta_{ij} = \delta_{ij}(u)$, $B_i = B_i(u)$.

Một cách tổng quát, ta xây dựng công thức Itô nhiều chiều như sau:

Cho $X_t = (X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t))^T$, $t \geq 0$ là một quá trình ngẫu nhiên n-chiều và $B_t = (B_1(t), B_2(t), ..., B_d(t))^T$, $t \geq 0$ là một chuyển động Brown d-chiều. Vi phân Itô $dX_t = (dX_1(t), dX_2(t), ..., dX_n(t))^T$ có thể viết hình thức như sau:

$$dX_t = h(t,\omega)dt + f(t,\omega)dB_t \tag{4.11}$$
$$\text{hay} \qquad dX = hdt + fdB.$$

với $h(t,\omega) = (h_1(t,\omega), h_2(t,\omega)..., h_n(t,\omega))^T$, $dB_t = (dB_1(t), dB_2(t)..., dB_d(t))^T$ và

$$f(t,\omega) = \begin{pmatrix} f_{11}(t,\omega) & f_{12}(t,\omega) & \dots & f_{1d}(t,\omega) \\ f_{21}(t,\omega) & f_{22}(t,\omega) & \dots & f_{2d}(t,\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(t,\omega) & f_{n2}(t,\omega) & \dots & f_{nd}(t,\omega) \end{pmatrix}$$

Ta có định lý sau (xem chi tiết trong tài liệu [6]):

Định lý 4.2.3. (Công thức Itô nhiều chiều). *Cho B_t là một chuyển động Brown d-chiều và X_t là một quá trình ngẫu nhiên n-chiều có vi phân Itô dạng (4.11). Giả sử $g(t,x) = (g_1(t,x), g_2(t,x), ..., g_m(t,x))$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ là một hàm vecto sao cho các hàm $g_j(t,x) = g_j(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ khả vi cấp 1 theo t và khả vi cấp hai theo các biến x_i. Khi đó quá trình ngẫu nhiên m-chiều $Y_t = g(t, X_t) = (Y_1(t), Y_2(t), ..., Y_m(t))$, $t \geq 0$ cũng có vi phân Itô*

$$dY_t = (dY_1(t), dY_2(t), ..., dY_m(t))$$

trong đó với mỗi $j = 0, 1, \dots, m$, vi phân $dY_j(t)$ xác định như sau:

$$dY_j(t) = \frac{\partial g_j(t, X_t)}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(t, X_t)}{\partial x_i}dX_i(t) + \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 g_j(t, X_t)}{\partial x_i \partial x_k}dX_i(t)dX_k(t) \tag{4.12}$$

Ví dụ 4.2.3. Tìm vi phân Itô của quá trình ngẫu nhiên $X_t = (X_1(t), X_2(t))$ với $X_1 = \cos B_t, X_2(t) = \sin B_t$ và B_t là một chuyển động Brown.
Giải: Xét hàm vectơ $g(t,x) = (g_1(t,x); g_2(t,x))$ trong đó $g_1(t,x) = \cos x$; $g_2(t,x) = \sin x$. Ta có:

$$\frac{\partial g_1(t,x)}{\partial t} = 0, \frac{\partial g_1(t,x)}{\partial x} = -\sin x; \frac{\partial g_1^2(t,x)}{\partial x^2} = -\cos x; \frac{\partial g_1^2(t,x)}{\partial x_1 \partial x_2} = 0;$$
$$\frac{\partial g_2(t,x)}{\partial t} = 0; \frac{\partial g_2(t,x)}{\partial x} = \cos x; \frac{\partial g_2^2(t,x)}{\partial x^2} = -\sin x; \frac{\partial g_2^2(t,x)}{\partial x_2 \partial x_1} = 0.$$

Áp dụng công thức Itô nhiều chiều ta có $dX_t = (dX_1(t); dX_2(t))$, trong đó:

$$dX_1(t) = -\sin B_t dB_t - \frac{1}{2}\cos B_t dt;$$
$$dX_2(t) = \cos B_t dB_t - \frac{1}{2}\sin B_t dt.$$

Ví dụ 4.2.4. Tìm vi phân Itô của quá trình ngẫu nhiên $X_t = (X_1(t), X_2(t))$ với $X_1 = B_1^2(t) + B_2^2(t), X_2(t) = tB_1(t)B_2(t)$ và $B_t = (B_1(t); B_2(t))$ là một chuyển động Brown 2-chiều.
Giải: Xét hàm vectơ $g(t,x) = (g_1(t,x); g_2(t,x))$ trong đó $g_1(t,x) = x_1^2 + x_2^2$; $g_2(t,x) = tx_1x_2$. Ta có:

$$\frac{\partial g_1(t,x)}{\partial t} = 0; \frac{\partial g_1(t,x)}{\partial x_1} = 2x_1; \frac{\partial g_1(t,x)}{\partial x_2} = 2x_2;$$
$$\frac{\partial g_1^2(t,x)}{\partial x_1^2} = 2; \frac{\partial g_1^2(t,x)}{\partial x_2^2} = 2; \frac{\partial g_1^2(t,x)}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 = \frac{\partial g_1^2(t,x)}{\partial x_2 \partial x_1};$$
$$\frac{\partial g_2(t,x)}{\partial t} = x_1x_2; \frac{\partial g_2(t,x)}{\partial x_1} = tx_2; \frac{\partial g_2(t,x)}{\partial x_2} = tx_1;$$
$$\frac{\partial g_2^2(t,x)}{\partial x_1^2} = 0; \frac{\partial g_2^2(t,x)}{\partial x_2^2} = 0; \frac{\partial g_2^2(t,x)}{\partial x_2 \partial x_1} = t = \frac{\partial g_2^2(t,x)}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Áp dụng công thức Itô nhiều chiều ta có $dX_t = (dX_1(t); dX_2(t))$, trong đó:

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= 2B_1(t)dB_1(t) + 2B_2(t)dB_2(t) + \frac{1}{2}(2dt + 2dt) \\ &= 2(B_1(t)dB_1(t) + B_2(t)dB_2(t) + dt); \\ dX_2(t) &= B_1(t)B_2(t)dt + tB_2(t)dB_1(t) + tB_1(t)dB_2(t) + \frac{1}{2}(tdB_1(t)dB_2(t)) \\ &= B_1(t)B_2(t)dt + t(B_2(t)dB_1(t) + B_1(t)dB_2(t)). \end{aligned}$$

Công thức Itô nhiều chiều thường được dùng để thực hiện các phép biến đổi ngẫu nhiên và giải các phương trình vi phân ngẫu nhiên nhiều chiều; nhờ đó có thể xây dựng các mô hình định giá với nhiều tài sản tài chính.

4.3 Tích phân ngẫu nhiên Stratonovich

4.3.1 Khái niệm

Với định nghĩa tích phân Itô nêu ở phần trên, thì giá trị của quá trình f trong tổng tích phân S_n lấy tại đầu mút bên trái t_k của mỗi đoạn nhỏ $[t_k, t_{k+1}]$ của phân hoạch $\Pi : 0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\left[B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right].$$

Bây giờ, thay vì đầu mút trái, ta chọn điểm chính giữa $\dfrac{t_k + t_{k+1}}{2}$ của mỗi đoạn nhỏ đó, khi đó ta có định nghĩa của một loại tích phân ngẫu nhiên mới, gọi là tích phân Stratonovich.

Định nghĩa 4.3.1. *Tích phân Stratonovich được định nghĩa bởi giới hạn theo nghĩa bình phương trung bình của tổng*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2}\right)\left[B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right].$$

khi $\|\Pi\| \to 0$, *và ký hiệu bởi*

$$\int_0^t f(s,\omega) \circ dB_s.$$

4.3.2 Liên hệ giữa tích phân Stratonovich và tích phân Itô

Từ định nghĩa, ta dễ dàng suy ra công thức liên hệ giữa tích phân Stratonovich và tích phân Itô như sau:

$$\int_0^t f(s,\omega) \circ dB_s = \int_0^t f(s,\omega) dB_s + \frac{1}{2} \langle f, B \rangle (t).$$

Đặc biệt, khi $h(x)$ là hàm một biến khả vi liên tục với nguyên hàm $U(x)$ thì người ta chứng minh được công thức sau (Công thức kiểu Newton-Leibnitz đối với tích phân Stratonovich):

$$\int_{t_0}^t h(B_s) \circ dB_s = U(B_t) - U(B_{t_0}).$$

Thật vậy, cả hai vế đều bằng:

$$\int_{t_0}^t h(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t h'(B_s) ds.$$

Nhờ công thức trên, có thể áp dụng được các quy tắc của tích phân xác định trong Giải tích cổ điển cho tích phân Stratonovich, chẳng hạn:

$$\int_0^t B_s \circ dB_s = \frac{1}{2} B_t^2$$

$$\int_0^t e^{B_s} \circ dB_s = e^{B_t} - 1, \ldots$$

Cũng nhờ vậy, đôi khi việc tính một tích phân Itô sẽ trở nên dễ dàng hơn nếu ta chuyển sang tích phân Stratonovich.

Ví dụ 4.3.1.

$$\int_0^t B_s dB_s = \int_0^t B_s \circ dB_s - \frac{1}{2} \langle B, B \rangle (t) = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t.$$

BÀI TẬP

Bài tập 4.1. Sử dụng định nghĩa tích phân Itô, tính tích phân: $\int_0^t s dB_s$.

Bài tập 4.2. Sử dụng công thức Itô, tính tích phân: $\int_0^t \exp\left(B_s^2\right) dB_s$.

Bài tập 4.3. Sử dụng công thức Itô, chứng minh rằng:

$$\int_0^t B_s^2 dB_s = \frac{1}{3}B_t^3 - \int_0^t B_s ds.$$

Bài tập 4.4. Cho $dX_t = f_t dB_t$ và $Y_t = g(t, X_t)$. Sử dụng công thức Itô, chỉ ra rằng:

a) Nếu $g(t,x) = \exp(x)$ thì: $dY_t = \frac{1}{2}f_t^2 Y_t dt + f_t Y_t dB_t$.

a) Nếu $g(t,x) = \exp\left(x - \frac{1}{2}\int_0^t f_s^2 ds\right)$ thì: $dY_t = f_t Y_t dB_t$.

Bài tập 4.5. Sử dụng tính chất của tích phân Itô, xét xem các quá trình sau có phải là martingale hay không:

a) $M_t = \exp\left(\frac{1}{2}t\right) \times \cos B_t, \quad t \geq 0$.

b) $M_t = \exp\left(\frac{1}{2}t\right) \times \sin B_t, \quad t \geq 0$.

c) $X_t = (B_t + t) \times \exp\left(-B_t - \frac{1}{2}t\right)$.

Bài tập 4.6. Các quá trình sau đây có phải là martingale đối với bộ lọc $\mathcal{F}_t^B$ hay không:

a) $X_t = B_t^2$.

b) $X_t = t^2 B_t - 2\int_0^t s B_s ds$.

c) $X_t = B_1(t)B_2(t)$ trong đó $(B_1(t), B_2(t))$ là chuyển động Brown 2 chiều.

Bài tập 4.7. Tìm vi phân Itô của các quá trình sau:

a) $X_t = B_t^2$.

b) $X_t = 2 + t + \exp(B_t)$.

c) $X_t = \exp(\alpha t + \beta B_t)$, α, β là các hằng số.

Bài tập 4.8. Tìm vi phân Itô của các quá trình sau:

a) $X_t = B_1^2(t) + B_2^2(t)$, với $(B_1(t), B_2(t))$ là chuyển động Brown 2-chiều.

b) $X_t = B_1(t)B_2(t)$, với $(B_1(t), B_2(t))$ là chuyển động Brown 2-chiều.

c) $X_t = (t_0 + t, B_t)$, với B_t là chuyển động Brown 1-chiều.

d) $X_t = (B_1(t) + B_2(t) + B_3(t), B_2^2(t) - B_1(t)B_2(t))$, với $(B_1(t), B_2(t), B_3(t))$ là chuyển động Brown 3-chiều.

e) $X_t = \exp\left(ct + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j B_j(t)\right)$, với $c, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ là các hằng số thực, $(B_1(t), \ldots, B_n(t))$ là chuyển động Brown n-chiều.

Bài tập 4.9. Chứng minh rằng, nếu $f(t,\omega)$ là một quá trình ngẫu nhiên với quỹ đạo có biến phân giới nội, thì ta có công thức tích phân từng phần sau:

$$\int_0^t f(s,\omega)dB_s = f(t,\omega)B_t - \int_0^t B_s df(s) - \langle f, B\rangle(t),$$

trong đó $\langle f, B\rangle(t)$ là biến phân bậc hai của quá trình f và B.

Bài tập 4.10. Chứng minh rằng: Nếu X là một quá trình Poisson tiêu chuẩn thì martingale Poisson $Y_t = X_t - t$ có biến phân bậc hai là $\langle Y\rangle(t) = t$.

Bài tập 4.11. Tính tích phân: $\int_0^t \exp(B_s) \circ dB_s$.

Bài tập 4.12. Biến đổi các vi phân Stratonovich sau đây thành vi phân Itô:

a) $dX_t = \alpha X_t dt + \gamma X_t \circ dB_t$.

b) $dX_t = \sin X_t \cos X_t dt + (t^2 + \cos X_t) \circ dB_t$.

Bài tập 4.13. Biến đổi các vi phân Itô sau đây thành vi phân Stratonovich:

a) $dX_t = rX_t dt + \alpha X_t dB_t$.

b) $dX_t = 2\exp(-X_t)dt + X_t^2 dB_t$.

Bài tập 4.14. Cho X_t, Y_t là các quá trình ngẫu nhiên trên $\mathbb{R}$ có các vi phân dX_t, dY_t viết dưới dạng chuẩn. Chứng minh rằng:

$$d(X_tY_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t.$$

Từ đó rút ra công thức tích phân từng phần tổng quát

$$\int_0^t X_s dY_s = X_tY_t - X_0Y_0 - \int_0^t dX_s dY_s - \int_0^t Y_s dX_s.$$

Bài tập 4.15. Cho X_t là một quá trình ngẫu nhiên có vi phân Itô:

$$dX_t = f(t,\omega)dB_t.$$

a) X_t^2 có phải là một martingale không?
b) Chứng minh rằng

$$M_t := X_t^2 - \int_0^t |f_s|^2 ds$$

là một martingale.
c) Chứng minh rằng $\int_0^t |f_s|^2 ds = \langle X, X\rangle_t$. Từ đó suy ra $X^2 - \langle X\rangle_t$ là một martingale.

Bài tập 4.16. Cho W_t^1, W_t^2 là các quá trình Wiener độc lập, chứng minh rằng:

$$d\left(W_t^1 W_t^2\right) = W_t^2 d_t^1 + W_t^1 dW_t^2,$$

trái lại, khi $W_t^1 = W_t^2 = W_t$ thì

$$d\left((W_t)^2\right) = 1dt + 2W_t dW_t.$$

Chương 5

Phương trình vi phân ngẫu nhiên và ứng dụng

Nhiều quá trình tài sản tài chính là các quá trình ngẫu nhiên mà động học của nó cho bởi các phương trình vi phân ngẫu nhiên. Do vậy để nghiên cứu các đặc tính của các quá trình này chúng ta cần giải các phương trình vi phân ngẫu nhiên và mô phỏng được quỹ đạo nghiệm của nó. Trong chương này chúng ta tìm hiểu những nội dung sau đây:

- Phương trình vi phân ngẫu nhiên.
- Tính chất Markov và một số mô hình tài chính.
- Phương trình vi phân ngẫu nhiên nhiều chiều.
- Mô phỏng ngẫu nhiên.

5.1 Phương trình vi phân ngẫu nhiên

5.1.1 Khái niệm

Phương trình vi phân ngẫu nhiên (Stochastic Differential Equations - viết gọn là SDE) là phương trình có dạng:

$$dX(t) = a(t, X(t))\, dt + \sigma(t, X(t))\, dB(t), \tag{5.1}$$

trong đó $a(t, x)$ và $\sigma(t, x)$ là các hàm đã cho, $B(t)$ là chuyển động Brown.

Giả sử (t_0, x) đã cho. Nghiệm (còn gọi là lời giải) của phương trình (5.1) với điều kiện ban đầu (t_0, x) là một quá trình ngẫu nhiên $\{X(t)\}_{t\geq t_0}$ thoả mãn:

$$X(t_0) = x,$$

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s, X(s))\,ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s, X(s))\,dB(s), \quad t \geq t_0.$$

Quá trình nghiệm $\{X(t)\}_{t\geq t_0}$ thích nghi với lọc $\{\mathcal{F}(t)\}_{t\geq 0}$ sinh bởi chuyển động Brown. Nếu ta biết quỹ đạo của chuyển động Brown tới trước thời điểm t, thì ta biết giá trị $X(t)$.

Giả sử $X = (X_t)$, $t \geq t_0$ là một lời giải của phương trình (5.1). Ta nói lời giải đó là duy nhất theo nghĩa sau: Nếu có một quá trình $Y = (Y_t)$, $t \geq t_0$ cũng là một lời giải của phương trình trên thì

$$\mathbb{P}\Big\{\sup_{t\geq t_0} |X_t - Y_t| = 0\Big\} = 1.$$

Ta thừa nhận định lý sau (chứng minh chi tiết có thể tham khảo trong tài liệu [6]):

Định lý 5.1.1. (Định lý tồn tại và duy nhất). *Nếu tồn tại một hằng số $K > 0$ sao cho với mọi $t \geq t_0$ và mọi $x, y \in \mathbb{R}$*

$$\big|a(t,x) - a(t,y)\big| + \big|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\big| \leq K|x - y| \tag{5.2}$$

$$\big|a(t,x)\big|^2 + \big|\sigma(t,x)\big|^2 \leq K^2(1 + |x|^2) \tag{5.3}$$

thì phương trình (5.1) tồn tại và duy nhất một lời giải.

Ví dụ 5.1.1. (Dịch chuyển của chuyển động Brown). Giả sử a là một hằng số và $\sigma = 1$, xét phương trình:

$$dX(t) = a\,dt + dB(t).$$

Nếu (t_0, x) đã cho và điều kiện ban đầu

$$X(t_0) = x,$$

thì

$$X(t) = x + a(t - t_0) + (B(t) - B(t_0)), \quad t \geq t_0.$$

Đây là nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên đã cho. Để tính vi phân đối với t ta coi như t_0 và $B(t_0)$ là các hằng số, ta có:

$$dX(t) = a\,dt + dB(t).$$

Ví dụ 5.1.2. (Chuyển động Brown hình học). Giả sử μ và σ là các hằng số. Xét phương trình:

$$dX(t) = \mu X(t)\, dt + \sigma X(t)\, dB(t).$$

Cho điều kiện ban đầu

$$X(t_0) = x,$$

khi đó nghiệm của phương trình là:

$$X(t) = x \exp\left\{\sigma\left(B(t) - B(t_0)\right) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t - t_0)\right\}.$$

Tính vi phân đối với t một lần nữa, coi như t_0 và $B(t_0)$ là các hằng số, ta có:

$$\begin{aligned} dX(t) &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) X(t)\, dt + \sigma X(t)\, dB(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 X(t)\, dt \\ &= \mu X(t)\, dt + \sigma X(t)\, dB(t). \end{aligned}$$

Chú ý 5.1.1. *Để đơn giản, trong giáo trình này ta luôn giả thiết $a(t,x)$ và $\sigma(t,x)$ là các hàm liên tục theo (t,x) và liên tục Lipschitz theo x, tức là có một hằng số L sao cho:*

$$|a(t,x) - a(t,y)| \leq L|x-y|, \qquad |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq L|x-y| \tag{5.4}$$

với mọi t, x, y và khi đó các điều kiện (5.2), (5.3) luôn được thoả mãn.

Chú ý 5.1.2. *Cũng như đối với phương trình vi phân thường, ta không có một phương pháp chung để giải các phương trình vi phân ngẫu nhiên. Trong các mục sau, chúng ta sẽ xây dựng phương pháp giải cho một số lớp phương trình vi phân ngẫu nhiên có lời giải dưới dạng hiển.*

5.1.2 Phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính

Định nghĩa 5.1.1. *Phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính là các phương trình có dạng:*

$$dX_t = \left[a_1(t) X_t + a_2(t)\right] dt + \left[b_1(t) X_t + b_2(t)\right] dB_t, \tag{5.5}$$

trong đó a_1, a_2, b_1, b_2 là các hàm nào đó của thời gian t hoặc là các hằng số còn B_t là một chuyển động Brown.

Cách giải. Để đơn giản ta xét $t \in [0, T]$ và giả sử các hệ số a_1, a_2, b_1, b_2 thoả mãn các điều kiện (5.2), (5.3) trên đoạn $[0, T]$; khi đó phương trình (5.5) có lời giải duy nhất.

Trước tiên, ta xét hai trường hợp đặc biệt của phương trình (5.5):

• **Trường hợp 1.** Nếu $a_2(t) \equiv 0$ và $b_2(t) \equiv 0$ thì phương trình (5.5) trở thành một phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính thuần nhất:

$$dX_t = a_1(t) X_t dt + b_1(t) X_t dB_t. \tag{5.6}$$

Tất nhiên, $X_t \equiv 0$ là một lời giải tầm thường của (5.6). Sau đây ta sẽ đi tìm một lời giải không phải ở dạng tầm thường của phương trình đó.

Ta viết (5.6) dưới dạng:

$$\frac{dX_t}{X_t} = a_1(t) dt + b_1(t) dB_s. \tag{5.7}$$

Lấy tích phân hai vế của (5.7) ta có:

$$\int_0^t \frac{dX_s}{X_s} = \int_0^t a_1(s) ds + \int_0^t b_1(s) dB_s. \tag{5.8}$$

Áp dụng công thức Itô cho hàm $g(t,x) = \ln x$, $Y_t = g(t, X_t) = \ln X_t$;

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{x}; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2};$$

ta có:

$$\begin{aligned} Y_t &= \ln X_0 + \int_0^t \frac{dX_s}{X_s} + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{-1}{X_s^2} b_1^2(s) X_s^2 ds \\ \Leftrightarrow Y_t &= \ln X_0 + \int_0^t \frac{dX_s}{X_s} - \frac{1}{2}\int_0^t b_1^2(s) ds \end{aligned}$$

hay

$$\begin{aligned} \ln X_t &= \ln X_0 + \int_0^t \frac{dX_s}{X_s} - \frac{1}{2}\int_0^t b_1^2(s) ds \\ \Rightarrow \int_0^t \frac{dX_s}{X_s} &= \ln \frac{X_t}{X_0} + \frac{1}{2}\int_0^t b_1^2(s) ds. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Kết hợp (5.8) và (5.9) ta có:

$$\begin{aligned}
\ln \frac{X_t}{X_0} &= \int_0^t a_1(t)\,ds - \frac{1}{2}\int_0^t b_1^2(t)\,ds + \int_0^t b_1(t)\,dB_s \\
\Leftrightarrow \frac{X_t}{X_0} &= \exp\left[\int_0^t a_1(s)\,ds - \frac{1}{2}\int_0^t b_1^2(s)\,ds + \int_0^t b_1(s)\,dB_s\right] \\
\Leftrightarrow X_t &= X_0 \exp\left[\int_0^t a_1(s)\,ds - \frac{1}{2}\int_0^t b_1^2(s)\,ds + \int_0^t b_1(s)\,dB_s\right].
\end{aligned}$$

Vậy lời giải của phương trình (5.6) là:

$$X_t = X_0 \exp\left[\int_0^t \left(a_1(s) - \frac{1}{2}b_1^2(s)\right) ds + \int_0^t b_1(s)\,dB_s\right]. \qquad (5.10)$$

Ví dụ 5.1.3. Xét phương trình vi phân:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t,$$

trong đó μ, σ là các hằng số, $X_0 = x$.
Giải: Dễ thấy, đây là phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính dạng (5.6) với $a_1(t) \equiv \mu$, $b_1(t) \equiv \sigma$. Theo công thức nghiệm (5.10) lời giải của phương trình là:

$$X_t = x.\exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t\right].$$

Phương trình trên mô tả mô hình Black-Scholes trong tài chính mà sau này ta sẽ xét đến.

• **Trường hợp 2.** Nếu $b_1(t) \equiv 0$ thì phương trình (5.5) có dạng:

$$dX_t = [a_1(t) X_t + a_2(t)]\,dt + b_2(t)\,dB_t, \qquad (5.11)$$

trong đó tiếng ồn xuất hiện dưới dạng cộng tính. Khi đó, người ta nói rằng, phương trình vi phân ngẫu nhiên là tuyến tính theo nghĩa hẹp.

Cũng như khi tìm nghiệm của phương trình vi phân thường, để tìm nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính (5.11), trước tiên ta tìm nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên thuần nhất tương ứng dạng:

$$dX_t = a_1(t)\,X_t dt. \qquad (5.12)$$

Ta gọi lời giải của phương trình (5.12), thỏa mãn điều kiện đầu $X_0 = 1$ là lời giải cơ bản và ký hiệu là ϕ_t. Dễ thấy:

$$\phi_t = \exp \int_0^t a_1(s)\, ds.$$

Áp dụng công thức Itô cho hàm $g(t,x) = \phi_t^{-1} x$, $Y_t = g(t, X_t) = \phi_t^{-1} X_t$,

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \left(\phi_t^{-1}\right)' x;\ \frac{\partial g}{\partial x} = \phi_t^{-1};\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0,$$

ta có:

$$\begin{aligned} dY_t &= \left(\phi_t^{-1}\right)' X_t dt + \phi_t^{-1} dX_t \\ &= \left(\phi_t^{-1}\right)' X_t dt + \phi_t^{-1}\left[\left(a_1(t) X_t + a_2(t)\right) dt + b_2(t)\, dB_t\right]. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Mặt khác $\left(\phi_t^{-1}\right)' = -\phi_t^{-1} a_1(t)$ thay vào (5.13) ta được:

$$\begin{aligned} dY_t &= -\phi_t^{-1} a_1(t) X_t dt + \phi_t^{-1}\left[\left(a_1(t) X_t + a_2(t)\right) dt + b_2(t)\, dB_t\right] \\ \Leftrightarrow \quad dY_t &= a_2(t)\, \phi_t^{-1} dt + b_2(t)\, \phi_t^{-1} dB_t \\ \Leftrightarrow \quad Y_t &= Y_0 + \int_0^t a_2(s)\, \phi_s^{-1} ds + \int_0^t b_2(s)\, \phi_s^{-1} dB_s \\ \Leftrightarrow \phi_t^{-1} X_t &= \phi_0^t X_0 + \int_0^t a_2(s)\, \phi_s^{-1} ds + \int_0^t b_2(s)\, \phi_s^{-1} dB_s. \end{aligned}$$

Vì $\phi_0 = 1$ nên

$$X_t = \phi_t \left[X_0 + \int_0^t a_2(s)\, \phi_s^{-1} ds + \int_0^t b_2(s)\, \phi_s^{-1} dB_s\right] \quad (5.14)$$

là lời giải của phương trình tuyến tính theo nghĩa hẹp (5.11).

Ví dụ 5.1.4. Xét phương trình vi phân có dạng:

$$dX_t = -a X_t dt + b dB_t$$

trong đó a, b là các hằng số, phương trình này gọi là phương trình Langevin.
Giải: Đây là phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính dạng (5.11) với $a_1(t) \equiv -a$, $a_2(t) \equiv 0$, $b_2(t) \equiv b$. Vậy theo công thức (5.14) lời giải cơ bản là:

$$\phi_t = \exp(-at),$$

và lời giải tổng quát:

$$X_t = e^{-at}X_0 + e^{-at}\int_0^t e^{as}bdB_s.$$

Bây giờ lợi dụng cách giải hai dạng phương trình đặc biệt đã trình bày ở trên, ta xây dựng phương pháp giải phương trình (5.5) trong trường hợp tổng quát như sau:

Xét các phương trình:

$$dV_t = a_1(t)V_tdt + b_1(t)V_tdB_t, \tag{5.15}$$

$$dU_t = \alpha(t)dt + \beta(t)dB_t. \tag{5.16}$$

Lời giải cơ bản của phương trình (5.15) là:

$$V_t = \phi_t = \exp\left[\int_0^t \left(a_1(s) - \frac{b_1^2(s)}{2}\right)ds + \int_0^t b_1(s)dB_s\right]. \tag{5.17}$$

Ta tìm nghiệm của phương trình (5.5) dạng $X_t = V_tU_t$. Ta có:

$$\begin{aligned} & dX_t = V_tdU_t + U_tdV_t + dU_tdV_t \\ = \ & V_t[\alpha(t)dt + \beta(t)dB_t] + U_t[a_1(t)V_tdt + b_1(t)V_tdB_t] + b_1(t)\beta(t)V_tdt \\ = \ & [\alpha(t)V_t + a_1U_tV_t + b_1(t)\beta(t)V_t]dt + [\beta(t)V_t + b_1(t)U_tV_t]dB_t \\ = \ & [a_1(t)X_t + \alpha(t)V_t + b_1(t)\beta(t)V_t]dt + [b_1(t)X_t + \beta(t)V_t]dB_t. \end{aligned}$$

So sánh với (5.5) ta có:

$$\alpha(t)V_t + b_1(t)\beta(t)V_t = a_2(t), \tag{5.18}$$

$$\beta(t)V_t = b_2(t). \tag{5.19}$$

Thế V_t trong (5.17) vào (5.18) và (5.19) rồi giải ta được:

$$\begin{cases} \alpha(t) = a_2(t)\phi_t^{-1} - b_1(t)\phi_t^{-1}, \\ \beta(t) = b_2(t)\phi_t^{-1}. \end{cases}$$

Thay trở lại phương trình (5.16) rồi lấy tích phân hai vế ta có:

$$\begin{aligned} U_t &= U_0 + \int_0^t \phi_s^{-1}[a_2(s) - b_1(s)b_2(s)]ds + \int_0^t \phi_s^{-1}b_2(s)dB_s \\ \Rightarrow X_t &= \phi_t\left[X_0 + \int_0^t \phi_s^{-1}[a_2(s) - b_1(s)b_2(s)]ds + \int_0^t \phi_s^{-1}b_2(s)dB_s\right]. \end{aligned}$$

Vậy lời giải của phương trình (5.5) là:

$$X_t = \phi_t \left[X_0 + \int_0^t \phi_s^{-1} \left[a_2(s) - b_1(s) b_2(s)\right] ds + \int_0^t \phi_s^{-1} b_2(s)\, dB_s\right] \quad (5.20)$$

với

$$\phi_t = \exp\left[\int_0^t \left(a_1(s) - \frac{b_1^2(s)}{2}\right) ds + \int_0^t b_1(s)\, dB_s\right].$$

Trên đây, chúng ta đã xây dựng được cách giải phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính tổng quát. Trong thực tế, tùy thuộc vào từng vấn đề cụ thể, ta thường gặp một số dạng phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính sau đây:

Phương trình tuyến tính với nhiễu cộng tính

a, *Hệ số không đổi: Trường hợp thuần nhất.*

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dB_t, \quad (5.21)$$

trong đó: α, σ là các hằng số.

Theo cách giải phương trình (5.11) với $a_1(t) \equiv -\alpha; a_2(t) \equiv 0; b_2(t) \equiv \sigma$ ta có lời giải của phương trình (5.21) là:

$$X_t = e^{-\alpha t}\left(X_0 + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dB_s\right).$$

b, *Hệ số không đổi: Trường hợp không thuần nhất.*

Xét phương trình

$$dX_t = (aX_t + b)\, dt + cdB_t, \quad (5.22)$$

trong đó: a, b, c là các hằng số.

Tương tự cách giải phương trình (5.11) ta có lời giải của phương trình (5.22) là:

$$X_t = e^{at}\left[X_0 + \frac{b}{a}\left(1 - e^{-at}\right) + c\int_0^t e^{-as} dB_s\right].$$

c, Hệ số biến đổi:

Xét phương trình:

$$dX_t = [a(t)\,X_t + b(t)]\,dt + c(t)\,dB_t. \tag{5.23}$$

Đây chính là phương trình (5.11) đã giải ở phần trước.
Lời giải tổng quát là:

$$X_t = \phi_t\left[X_0 + \int_0^t \phi_s^{-1} b(s)\,ds + \int_0^t \phi_s^{-1} c(s)\,dB_s\right]$$

với lời giải cơ bản:

$$\phi_t = \exp\int_0^t a(s)\,ds.$$

Ví dụ 5.1.5. Xét phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính với nhiễu cộng tính và với các hệ số biến đổi sau đây:

$$dX_t = \left[\frac{2}{1+t}X_t + \alpha(1+t)^2\right]dt + \alpha(1+t)^2\,dB_t,$$

trong đó α là một hằng số cho trước. Nhận thấy, đây là phương trình dạng (5.23) với $a(t) = \dfrac{2}{1+t}$; $b(t) = \alpha(1+t)^2$; $c(t) = \alpha(1+t)^2$ do đó phương trình này có lời giải cơ bản là:

$$\phi_t = (1+t)^2,$$

và lời giải tổng quát:

$$X_t = (1+t)^2 X_0 + \alpha(1+t)^2(B_t + t).$$

Phương trình tuyến tính với nhiễu nhân tính

a, Hệ số không đổi: Trường hợp thuần nhất.

$$dX_t = aX_t dt + bX_t dB_t. \tag{5.24}$$

Tương tự phương trình (5.6), phương trình (5.24) có lời giải:

$$X_t = X_0 \exp\left[\left(a - \frac{b^2}{2}\right)t + bB_t\right].$$

Hai dạng quan trọng nhất thuộc trường hợp này là:

• Phương trình mũ Itô:

$$dX_t = \frac{1}{2}X_t dt + X_t dB_t,$$

với lời giải là:

$$X_t = X_0 \exp\left(B_t\right).$$

• Phương trình dịch chuyển tự do:

$$dX_t = X_t dB_t,$$

với lời giải là:

$$X_t = X_0 \exp\left(B_t - \frac{t}{2}\right).$$

b, Hệ số không đổi: Trường hợp không thuần nhất.

Xét phương trình:

$$dX_t = (a.X_t + c)\, dt + (bX_t + d)\, dB_t. \tag{5.25}$$

Đây là phương trình tuyến tính ôtônôm đã trình bày cách giải ở phần trước. Lời giải cơ bản:

$$\phi_t = \exp\left[\left(a - \frac{b^2}{2}\right) t + bB_t\right].$$

Lời giải tổng quát:

$$X_t = \phi_t \left[X_0 + (c - bd) \int_0^t \phi_s^{-1} ds + d \int_0^t \phi_s^{-1} dB_s\right].$$

c, Hệ số biến đổi: Trường hợp thuần nhất.

Xét phương trình:

$$dX_t = a\,(t)\, X_t dt + b\,(t)\, X_t dB_t. \tag{5.26}$$

Phương trình này đã có cách giải trong mục 5.1.2, nên lời giải là:

$$X_t = X_0 \exp\left[\int_0^t \left(a\,(s) - \frac{1}{2}b^2\,(t)\right) ds + \int_0^t b\,(t)\, dB_s\right].$$

d, Hệ số biến đổi: Trường hợp không thuần nhất.

Xét phương trình:

$$dX_t = [a(t)X_t + c(t)]\,dt + [b(t)X_t + d(t)]\,dB_t. \tag{5.27}$$

Phương trình này đã có cách giải trong mục 5.1.2, nên lời giải cơ bản là:

$$\phi_t = \exp\left[\int_0^t \left(a(s) - \frac{b^2(s)}{2}\right)ds + \int_0^t b(s)\,dB_s\right].$$

Lời giải tổng quát là:

$$X_t = \phi_t\left[X_0 + \int_0^t \phi_s^{-1}[c(s) - b(s)\,d(s)]\,ds + \int_0^t \phi_s^{-1}d(s)\,dB_s\right].$$

Trong mục này, chúng ta đã xây dựng được lời giải của phương trình vi phân tuyến tính tổng quát và hệ thống lời giải của các lớp phương trình vi phân tuyến tính thường gặp. Những phương trình này có rất nhiều ứng dụng trong thực tế, đặc biệt là trong tài chính. Vấn đề đặt ra là ta sẽ giải quyết như thế nào với các phương trình vi phân ngẫu nhiên không phải tuyến tính dạng

$$dY_t = a(t, Y_t)\,dt + b(t, Y_t)\,dB_t?$$

Liệu ta có thể đưa về dạng tuyến tính để giải không? Trong các mục sau đây ta sẽ trả lời câu hỏi đó.

5.1.3 Đưa một số phương trình phi tuyến về tuyến tính

Cho một phương trình vi phân ngẫu nhiên phi tuyến:

$$dY_t = a(t, Y_t)\,dt + b(t, Y_t)\,dB_t. \tag{5.28}$$

Ta sẽ tìm cách đưa phương trình về dạng phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính bằng cách đặt $X_t = U(t, Y_t)$ trong đó $U(t, y)$ là hàm hai biến.

Nếu $\dfrac{\partial U}{\partial y}(t, y) \neq 0$ thì theo định lý hàm ngược, tồn tại một hàm ngược địa phương $y = V(t, x)$ của hàm $x = U(t, y)$ tức là với $x = U(t, V(t, x))$ thì:

$$y = V(t, U(t, y)).$$

Một lời giải của (5.28) khi đó có dạng: $Y_t = V(t, X_t)$ trong đó X_t cho bởi (5.5) với hệ số a_1, a_2, b_1, b_2 thích hợp nào đó.

Áp dụng công thức Itô cho hàm $U(t, y)$ với $y = Y_t$, ta có:

$$\begin{aligned} dU(t, Y_t) &= \frac{\partial U}{\partial t}(t, Y_t)\, dt + \frac{\partial U}{\partial y}(t, Y_t)\, dY_t + \frac{1}{2} b^2(t, Y_t) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(t, Y_t)\, dt \\ &= \frac{\partial U}{\partial t}(t, Y_t)\, dt + \frac{\partial U}{\partial y}(t, Y_t) \{a(t, Y_t)\, dt + b(t, Y_t)\, dB_t\} \\ &\quad + \frac{1}{2} b^2(t, Y_t) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(t, Y_t)\, dt \\ &= \left[\frac{\partial U}{\partial t}(t, Y_t) + a(t, Y_t) \frac{\partial U}{\partial y}(t, Y_t) + \frac{1}{2} b^2(t, Y_t) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(t, Y_t)\right] dt \\ &\quad + b(t, Y_t) \frac{\partial U}{\partial y}(t, Y_t)\, dB_t. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Muốn cho (5.29) trùng với phương trình tuyến tính (5.5) thì ta phải có:

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t, y) + a(t, y) \frac{\partial U}{\partial y}(t, y) + \frac{1}{2} b^2(t, y) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(t, y) = a_1(t)\, U(t, y) + a_2(t) \tag{5.30}$$

và

$$b(t, y) \frac{\partial U}{\partial y} = b_1(t)\, U(t, y) + b_2(t). \tag{5.31}$$

Với mức độ tổng quát này ta không giải quyết được gì thêm. Vì thế ta đi xét các trường hợp đặc biệt.

Xét trường hợp $a_1(t) \equiv 0$ và $b_1(t) \equiv 0$, khi đó từ (5.30) và (5.31) với $\alpha(t) = a_2(t)$, $\beta(t) = b_2(t)$ ta có các công thức đồng nhất sau:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial y}(t, y) = -\frac{\partial}{\partial y}\left[a(t, y) \frac{\partial U}{\partial y}(t, y) + \frac{1}{2} b^2(t, y) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(t, y)\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[b(t, y) \frac{\partial U}{\partial y}(t, y)\right] = 0,$$

$$b(t, y) \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial y}(t, y) + \frac{\partial b}{\partial y}(t, y) \frac{\partial U}{\partial y}(t, y) = \beta(t).$$

Bây giờ ta giả thiết $b(t, y) \neq 0$. Khi đó khử U và các đạo hàm của U trong hệ thức trên ta được:

$$\beta(t) = \beta(t)\, b(t, y) \left[\frac{1}{b^2(t.y)} \frac{\partial b}{\partial t}(t, y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a(t, y)}{b(t, y)}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial y^2}(t, y)\right].$$

Vì vế trái của đẳng thức này không phụ thuộc vào y nên sau khi bỏ $\beta(t)$ thì vế phải không phụ thuộc vào y, do đó:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial y}(t,y)=0,$$

với

$$\gamma(t,y)=\frac{1}{b(t,y)}\frac{\partial b}{\partial t}(t,y)-b(t,y)\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{a(t,y)}{b(t,y)}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial y}(t,y)\right]. \quad (5.32)$$

Đó là một điều kiện để đưa phương trình vi phân ngẫu nhiên phi tuyến về phương trình vi phân ngẫu nhiên có thể giải được dưới dạng hiển sau:

$$dX_t=\alpha(t)\,dt+\beta(t)\,dB_t$$

bằng một phép đổi biến $x=U(t,y)$ xác định bởi (5.30) và (5.31), trong trường hợp này các điều kiện được rút gọn thành:

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t,y)+a(t,y)\frac{\partial U}{\partial y}(t,y)+\frac{1}{2}b^2(t,y)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(t,y)=\alpha(t),$$

và

$$b(t,y)\frac{\partial U}{\partial y}(t,y)=\beta(t).$$

Giải ra đối với $U(t,y)$ ta được:

$$U(t,y)=C\exp\int_0^t\gamma(s,y)\,ds\int_0^s\frac{1}{b(t,z)}dz$$

trong đó C là một hằng số tùy ý.

5.1.4 Rút gọn phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính ôtônôm

Trong mục này, vận dụng cách giải quyết đã nêu ở mục trên ta sẽ đưa một phương trình vi phân ngẫu nhiên phi tuyến ôtônôm:

$$dY_t=a(Y_t)\,dt+b(Y_t)\,dB_t \quad (5.33)$$

về phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính ôtônôm dạng:

$$dX_t = (a_1 X_t + a_2)\, dt + (b_1 X_t + b_2)\, dB_t \tag{5.34}$$

bằng một phép đổi biến $X_t = U(Y_t)$ hay $x = U(y)$ không phụ thuộc vào thời gian t.

Trong trường hợp này các hệ thức (5.30) và (5.31) có dạng:

$$a(y)\frac{dU}{dy} + \frac{1}{2}b^2(y)\frac{d^2U}{dy^2} = a_1 U(y) + a_2, \tag{5.35}$$

$$b(y)\frac{dU}{dy} = b_1 U(y) + b_2. \tag{5.36}$$

Giả thiết $b(y) \not\equiv 0$ và $b_1 \neq 0$ thì từ (5.36) suy ra:

$$U(y) = C\exp[b_1 B(y)] - \frac{b_2}{b_1}, \tag{5.37}$$

trong đó $B(y) = \int_0^y \frac{ds}{b(s)}$ và C hằng số tùy ý.

Thay thế biểu thức của (5.37) vào (5.35) ta được:

$$\left(b_1 A(y) + \frac{1}{2}b_1^2 - a_1\right)(C\exp[b_1 B(y)]) = a_2 - a_1\frac{b_2}{b_1} \tag{5.38}$$

trong đó $A(y) = \frac{a(y)}{b(y)} - \frac{1}{2}\frac{db}{dy}$.

Đạo hàm hai vế của (5.38) ta có:

$$b_1\frac{dA}{dy}C\exp[b_1 B(y)] + \left[b_1 A(y) + \frac{1}{2}b_1^2 - a_1\right]C\frac{b_1}{b(y)}\exp[b_1 B(y)] = 0. \tag{5.39}$$

Nhân hai vế của (5.39) với $\frac{1}{b_1}b(y)\exp[-bB(y)]$ ta có:

$$b(y)\frac{dA}{dy} + \left(b_1 A(y) + \frac{1}{2}b_1^2 - a_1\right) = 0. \tag{5.40}$$

Đạo hàm hai vế của (5.40) ta được:

$$b_1\frac{dA}{dy} + \frac{d}{dy}\left(b\frac{dA}{dy}\right) = 0. \tag{5.41}$$

Hệ thức này thỏa mãn nếu như

$$\frac{dA}{dy} = 0 \quad \text{hoặc} \quad \frac{d}{dy}\left[\frac{\frac{d}{dy}\left(b\frac{dA}{dy}\right)}{\frac{dA}{dy}}\right] = 0, \tag{5.42}$$

miễn là chọn được b_1 sao cho:

$$b_1 = \frac{\frac{d}{dy}\left(b\frac{dA}{dy}\right)}{\frac{dA}{dy}}.$$

Nếu $b_1 \neq 0$ thì phép biến đổi thích hợp là:

$$U(y) = C\exp\left[b_1 B(y)\right], \qquad (\text{chọn} \;\; b_2 = 0). \tag{5.43}$$

Nếu $b_1 = 0$ thì từ (5.36) ta suy ra:

$$U(y) = b_2 B(y) + C. \tag{5.44}$$

Ví dụ 5.1.6. Xét phương trình vi phân ngẫu nhiên phi tuyến

$$dY_t = -\frac{1}{2}\exp(-2Y_t)\,dt + \exp(-Y_t)\,dB_t, \tag{5.45}$$

ở đây $a(y) = -\frac{1}{2}\exp(-2y)$ và $b(y) = \exp(-y)$ cho nên:

$$A(y) = \frac{a(y)}{b(y)} - \frac{1}{2}\frac{db}{dy} \equiv 0.$$

Vậy hệ thức (5.41) được thỏa mãn với mọi b_1.

Với $b_1 = 0$ và $b_2 = 1$ thì do (5.44) ta nhận thấy có một lời giải $U(y)$ của phương trình (5.36) là:

$$U(y) = \exp(y).$$

Thay $U(y)$ này vào (5.35) ta đi tới kết quả $a_1 = a_2 = 0$. Từ đó ta có $X_t = U(Y_t) = \exp(Y_t)$ và phương trình (5.34) cuối cùng trở thành:

$$dX_t = dB_t$$

mà lời giải là $X_t = B_t + X_0 = B_t + \exp(Y_0)$.

Vậy phương trình (5.36) có lời giải là:

$$Y_t = \ln\left[B_t + \exp(Y_0)\right].$$

5.1.5 Một số phương trình đưa được về dạng Stratonovich

a, Phương trình dạng

$$dX_t = \frac{1}{2}b(X_t)\,b'(X_t)\,dt + b(X_t)\,dB_t, \tag{5.46}$$

trong đó $b(x)$ là một hàm khả vi cho trước. Phương trình này có thể giải bằng các cách sau đây:

Cách thứ nhất: Đây là một phương trình ôtônôm

$$dX_t = a(X_t)\,dt + b(X_t)\,dB_t,$$

với $a = \frac{1}{2}bb'$ nên có thể áp dụng phương pháp đổi biến như đã nêu ở mục 5.1.3.

Cách thứ hai: Dựa vào mối liên hệ giữa tích phân Itô và tích phân Stratonovich ta thấy rằng phương trình (5.46) có thể đưa về phương trình Stratonovich đơn giản dạng:

$$dX_t = b(X_t) \circ dB_t. \tag{5.47}$$

Tích phân trực tiếp phương trình theo quy tắc của giải tích cổ điển thông thường ta được nghiệm:

$$X_t = h^{-1}\left(B_t + h(X_0)\right), \tag{5.48}$$

trong đó $y = h(x) = \int_0^x \frac{du}{b(u)}$ là một nguyên hàm của $\frac{1}{b(x)}$.

Ví dụ 5.1.7. Xét phương trình

$$dX_t = \frac{1}{2}a(a-1)\,X_t^{1-\frac{2}{a}}\,dt + aX_t^{1-\frac{1}{a}}\,dB_t.$$

Theo cách giải phương trình (5.46) với $b(X_t) = aX_t^{1-\frac{1}{a}}$, $b'(X_t) = (a-1)\,X_t^{-\frac{1}{a}}$ thì từ (5.47) phương trình đã cho được đưa về phương trình Stratonovich đơn giải sau:

$$dX_t = aX_t^{1-\frac{1}{a}} \circ dB_t. \tag{5.49}$$

Ở đây $h(x) = \int_0^x \frac{du}{b(u)} = \int_0^x \frac{du}{au^{1-\frac{1}{a}}} = x^{\frac{1}{a}}$. Do đó từ (5.48), phương trình (5.49) có lời giải:

$$X_t = \left(B_t + X_0^{\frac{1}{a}}\right)^a.$$

b, Phương trình có dạng

$$dX_t = \left[\alpha b(X_t) + \frac{1}{2} b(X_t) b'(X_t)\right] dt + b(X_t) dB_t, \tag{5.50}$$

trong đó α là một hằng số còn $b(x)$ là một hàm khả vi. Dựa vào mối liên hệ giữa tích phân Itô với tích phân Stratonovich, phương trình (5.50) tương đương với phương trình Stratonovich sau đây:

$$dX_t = \alpha b(X_t) dt + b(X_t) \circ dB_t \tag{5.51}$$

và có thể rút gọn thành phương trình:

$$dY_t = \alpha dt + \circ dB_t$$

nhờ một phép biến đổi $Y_t = h(X_t)$ trong đó h được cho bởi (5.47). Khi đó, tương tự (5.48), lời giải tổng quát của (5.51) là

$$X_t = h^{-1}(\alpha t + B_t + h(X_0)).$$

Ví dụ 5.1.8. Giải phương trình

$$dX_t = (1 + X_t)\left(1 + X_t^2\right) dt + \left(1 + X_t^2\right) dB_t.$$

Theo cách giải phương trình (5.50) với $\alpha = 1$, $b(X_t) = 1 + X_t^2, b'(X_t) = 2X_t$ thì phương trình đã cho được đưa về phương trình Stratonovich sau:

$$dX_t = \left(1 + X_t^2\right) dt + \left(1 + X_t^2\right) \circ dB_t. \tag{5.52}$$

ở đây $h(x) = \int_0^x \frac{du}{b(u)} = \int_0^x \frac{du}{1 + u^2} = \arctan x.$

Nhờ phép đổi biến $Y_t = \arctan X_t$ phương trình (5.52) có thể rút gọn thành phương trình:

$$\begin{aligned} dY_t &= dt + \circ dB_t \\ \Leftrightarrow Y_t &= Y_0 + t + B_t. \end{aligned}$$

Do đó phương trình đã cho có lời giải là:

$$X_t = \tan(t + B_t + \arctan X_0).$$

5.1.6 Phương trình có thể đưa về dạng phương trình Langevin

Xét phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô có dạng:

$$dX_t = \left[\alpha b(X_t) h(X_t) + \frac{1}{2} b(X_t) b'(X_t)\right] dt + b(X_t) dB_t, \qquad (5.53)$$

trong đó $h(x) = \int_0^x \frac{du}{b(u)}$ là một nguyên hàm của $\frac{1}{b(x)}$.

Nhờ phép đổi biến $Y_t = h(X_t)$ phương trình này có thể đưa về phương trình Langevin có dạng:

$$dY_t = \alpha Y_t dt + \circ dB_t = \alpha Y_t dt + dB_t.$$

Nhờ đó tìm được lời giải tổng quát của phương trình (5.53).

Ví dụ 5.1.9. Giải phương trình

$$dX_t = -\left(\sin 2X_t + \frac{1}{4}\sin 4X_t\right) dt + \sqrt{2}\cos^2 X_t dB_t.$$

Ta viết phương trình ở dạng:

$$\begin{aligned} dX_t &= \left[-\sqrt{2}\cos^2 X_t . \frac{1}{\sqrt{2}} \tan X_t + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos^2 X_t \left(-2\sqrt{2}\cos X_t \sin X_t\right)\right] dt \\ &\quad + \sqrt{2}\cos^2 X_t dB_t \end{aligned}$$

là một phương trình có thể đưa về phương trình Langevin:

$$dY_t = -Y_t dt + \sqrt{2} \circ dB_t = -Y_t dt + \sqrt{2} dB_t,$$

với $\alpha = -1$; $b(X_t) = \sqrt{2}\cos^2 X_t$; $h(X_t) = \tan X_t$;
$b'(X_t) = -2\sqrt{2}\cos X_t \sin X_t$.

Do đó, phương trình đã cho có lời giải:

$$X_t = \arctan\left[e^{-t}\tan X_0 + \sqrt{2}e^{-t}\int_0^t e^s dB_s\right].$$

5.1.7 Phương trình rút gọn được thuộc dạng hỗn hợp

Trong mục này, ta sẽ nghiên cứu một vài ví dụ về phương trình vi phân ngẫu nhiên rút gọn được nhưng không thuộc về các trường hợp đã nêu ở trên.

a, Phương trình có dịch chuyển là một đa thức bậc n.

Xét phương trình

$$dX_t = (aX_t^n + bX_t^n)\,dt + cX_t dB_t. \tag{5.54}$$

Dùng phép đổi biến $h(x) = x^{1-n}$ ta có thể đưa (5.54) về một phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính với nhiễu nhân tính.

Thật vậy, áp dụng công thức Itô cho hàm $y = x^{1-n}$ ta có:

$$\begin{aligned} dY_t &= 0 + (1-n)\,X_t^{-n}dX_t + \frac{1}{2}(1-n)(-n)\,X_t^{-1-n}c^2X_t^2dt \\ &= (1-n)\,X_t^{-n}\left[\left(aX_t^{-n} + bX_t\right)dt + cX_t^{1-n}dB_t - \frac{n(1-n)}{2}c^2X_t^{1-n}dt\right] \\ &= (1-n)\left[a + \left(bX_t^{1-n}\right)\right]dt + (1-n)\,cX_t^{1-n}dB_t - \frac{n(1-n)}{2}c^2X_t^{1-n}dt \\ &= (1-n)\left[a + \left(b - \frac{nc^2}{2}\right)X_t^{1-n}\right]dt + (1-n)\,cX_t^{1-n}dB_t \end{aligned}$$

$$dY_t = (1-n)\left[a + \left(b - \frac{nc^2}{2}\right)Y_t\right]dt + (1-n)\,cY_tdB_t.$$

Đây là phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính với nhiễu nhân tính, lời giải:

$$Y_t = \phi_t\left[Y_0 + a(1-n)\int_0^t \phi_s^{-1}ds\right]$$

với

$$\begin{aligned} \phi_t &= \exp\left[\left[\left(b - \frac{nc^2}{2}\right)(1-n) - \frac{(1-n)^2c^2}{2}\right]t + (1-n)\,cB_t\right] \\ &= \exp\left[\left(b - \frac{nc^2}{2}\right)(1-n)\,t - \frac{(1-n)^2c^2}{2}\right] + (1-n)\,cB_t. \end{aligned}$$

Trở lại biến X_t, ta có:

$$\begin{aligned} X_t^{1-n} &= \phi_t\left[X_0^{1-n} + a(1-n)\int_0^t \phi_s^{-1}ds\right] \\ \Leftrightarrow X_t &= \theta_t\left(X_0^{1-n} + a(1-n)\int_0^t \phi_s^{-1}ds\right)^{\frac{1}{1-n}}, \end{aligned}$$

trong đó $\theta_t = \exp\left[\left(b - \frac{c^2}{2}\right)t - cB_t\right]$.

Trường hợp $n = 2$ ta có phương trình vi phân ngẫu nhiên Verhulst:

$$dX_t = \left(\lambda X_t - X_t^2\right)dt + \sigma X_t dB_t. \tag{5.55}$$

Lời giải:

$$X_t = \frac{X_0 \exp\left[\left(\lambda - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right]}{1 + X_0\int_0^t \exp\left[\left(\left(\lambda - \frac{\sigma^2}{2}\right)s + \sigma B_s\right)\right]ds}.$$

Trường hợp $n = 3$ ta có phương trình vi phân ngẫu nhiên Ginzburg-Landau:

$$dX_t = \left[-X_t^3 + \left(\alpha + \frac{\sigma^2}{2}\right)X_t\right]dt + \sigma X_t dB_t. \tag{5.56}$$

Lời giải:

$$X_t = \frac{X_0 \exp(\alpha t + \sigma B_t)}{\left[1 + 2X_0\int_0^t \exp\left[(2\alpha + 2\sigma B_s)\right]ds\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

b, Phương trình có dịch chuyển là một hàm mũ.

$$dX_t = \left[\alpha\exp(cX_t) + b\right]dt + \sigma dB_t. \tag{5.57}$$

Dùng phép biến đổi hàm mũ $y = h(x) = \exp(-cx)$ ta sẽ đi tới một phương trình tuyến tính.

Thật vậy, áp dụng công thức Itô cho hàm $h(x)$ ta có:

$$\begin{aligned}
dY_t &= 0 - c\times\exp(-cX_t)\,dX_t + \frac{1}{2}c^2\exp(-cX_t)\,\sigma^2 dt\\
&= -c\times\exp(-cX_t)\left[\alpha\exp(cX_t) + b\right]dt + \sigma dB_t\sigma^2\exp(-cX_t)\\
&= -c\alpha dt - bc\exp(-cX_t)\,dt - c\sigma\exp(-cX_t)\,dB_t + \frac{1}{2}c^2\sigma^2\exp(-cX_t)\,dt\\
&= \left[-c\alpha + \left(-bc + \frac{1}{2}c^2\sigma^2\right)\exp(-cX_t)\right]dt - c\sigma\times\exp(-cX_t)\,dB_t\\
&= \left[-c\alpha + \left(-bc + \frac{1}{2}c^2\sigma^2\right)Y_t\right]dt - c\sigma\times Y_t dB_t.
\end{aligned}$$

Đây là một phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính với nhiễu nhân tính mà ta đã có cách giải ở mục 5.1.2. Do đó, lời giải của phương trình là:

$$Y_t = \phi_t\left[Y_0 - c\alpha\int_0^t \phi_s^{-1}ds\right], \tag{5.58}$$

với

$$\begin{aligned}\phi_t &= \exp\left[\left(\left(-bc+\frac{1}{2}c^2\sigma^2\right)-\frac{1}{2}c^2\sigma^2\right)t - c\sigma B_t\right]\\ &= \exp\left[-bct - c\sigma B_t\right].\end{aligned}$$

Từ đó, trở lại biến X_t ta có phương trình (5.58) tương đương phương trình:

$$\begin{aligned}
\exp(-cB_t) &= \exp\left[-bct - c\sigma B_t\right].\left[\exp(-cX_t) - c\alpha\int_0^t \exp\left[bcs - c\sigma.B_s\right]ds\right]\\
\Leftrightarrow -cX_t &= \left[-bct - c\sigma B_t\right] + \ln\left[\exp(-cX_t) - c\alpha\int_0^t \exp\left[bcs - c\sigma.B_s\right]ds\right]\\
\Leftrightarrow -cX_t &= -bct - c\sigma B_t\\
&\quad + \ln\left\{\exp(-cX_0)\left[1 - c\alpha\int_0^t \exp\left[cX_0 + bcs - c\sigma.B_s\right]ds\right]\right\}\\
\Leftrightarrow -cX_t &= -bct - c\sigma B_t - cX_0 - \ln\left[1 - c\alpha\int_0^t \exp\left[cX_0 + bcs - c\sigma.B_s\right]ds\right]\\
\Leftrightarrow X_t &= X_0 + bt + \sigma B_t - \frac{1}{c}\ln\left[1 - c\alpha\int_0^t \exp\left[cX_0 + bcs - c\sigma.B_s\right]ds\right].
\end{aligned}$$

Vậy phương trình(5.57) có lời giải:

$$X_t = X_0 + bt + \sigma B_t - \frac{1}{c}\ln\left[1 - c\alpha\int_0^t \exp\left[cX_0 + bcs - c\sigma.B_s\right]ds\right].$$

Ví dụ 5.1.10. Giải phương trình vi phân sau:

$$dX_t = \exp(2X_t)\,dt + 3dB_t.$$

Theo cách giải phương trình (5.57) ở trên với $\alpha = 1, b = 0, c = 2, \sigma = 3$ thì phương trình đã cho có lời giải:

$$X_t = X_0 + 3B_t - \frac{1}{2}\ln\left[1 - 2\int_0^t \exp(2X_0 + 6B_s)\,ds\right].$$

5.2 Tính chất Markov và một số mô hình tài chính

5.2.1 Tính chất Markov

Giả sử $0 \leq t_0 \leq t_1$ đã cho và $h(y)$ là một hàm nào đó. Ký hiệu:

$$\mathbb{E}^{t_0,x}\left[h\left(X\left(t_1\right)\right)\right]$$

là kỳ vọng của $h(X(t_1))$, $X(t_0) = x$. Bây giờ giả sử $\xi \in \mathbb{R}$ đã cho và bắt đầu với điều kiện gốc:

$$X(0) = \xi.$$

Ta có tính chất Markov:

$$\mathbb{E}^{t_0,\xi}\left[h\left(X\left(t_1\right)\right)\Big|\mathcal{F}\left(t_0\right)\right] = \mathbb{E}^{t_0,X(t_0)}\left[h\left(X\left(t_1\right)\right)\right].$$

Nói cách khác, nếu ta quan sát quỹ đạo của chuyển động Brown từ thời điểm 0 tới thời điểm t_0, và trên cơ sở thông tin này, ta muốn ước lượng $h(X(t_1))$, thì chỉ có một thông tin thích hợp là $X(t_0)$. Từ đó, nếu bắt đầu (5.1) tại thời điểm t_0 với giá trị $X(t_0)$, ta tính được giá trị của $h(X(t_1))$.

5.2.2 Mật độ chuyển

Cho $0 \leq t_0 \leq t_1$, ký hiệu:

$$p\left(t_0, t_1; x, y\right)$$

là mật độ (theo biến y) của $X(t_1)$, với điều kiện $X(t_0) = x$. Ta có:

$$\mathbb{E}^{t_0,x}\left[h\left(X\left(t_1\right)\right)\right] = \int_{\mathbb{R}} h(y)\, p\left(t_0, t_1; x, y\right) dy.$$

Tính chất Markov nói rằng với mọi ξ,

$$\mathbb{E}^{t_0,\xi}\left[h\left(X\left(t_1\right)\right)\Big|\mathcal{F}\left(t_0\right)\right] = \int_{\mathbb{R}} h(y)\, p\left(t_0, t_1; X\left(t_0\right), y\right) dy.$$

Ví dụ 5.2.1. Xét phương trình vi phân ngẫu nhiên

$$dX(t) = a dt + dB(t),$$

với điều kiện $X(t_0) = x$. Với $0 \leq t_0 \leq t_1$, biến ngẫu nhiên $X(t_1)$ có phân phối chuẩn với trung bình $x + a(t_1 - t_0)$ và phương sai $(t_1 - t_0)$, tức là

$$p(t_0, t_1; x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_1 - t_0)}} \exp\left\{-\frac{(y - (x + a(t_1 - t_0)))^2}{2(t_1 - t_0)}\right\}.$$

Nhận thấy rằng p phụ thuộc vào t_0 và t_1 chỉ qua hiệu $(t_1 - t_0)$ của chúng.

Ví dụ 5.2.2. Ta đã biết rằng nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên

$$dX(t) = \mu X(t)\,dt + \sigma X(t)\,dB(t),$$

với điều kiện đầu $X(t_0) = x$, là một chuyển động Brown hình học:

$$X(t_1) = x \exp\left\{\sigma(B(t_1) - B(t_0)) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_1 - t_0)\right\}.$$

Biến ngẫu nhiên $B(t_1) - B(t_0)$ có hàm mật độ:

$$\begin{aligned} &p(t_0, t_1; x, y)\,dy = \mathbb{P}\{X(t_1) \in dy\} \\ &= \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi(t_1 - t_0)}} \exp\left\{\frac{-1}{2(t_1 - t_0)\sigma^2}\left[\log\frac{y}{x} - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_1 - t_0)\right]^2\right\} dy. \end{aligned}$$

Sử dụng mật độ chuyển và một chút tính toán, người ta có thể tính thu hoạch kỳ vọng từ một quyền chọn mua kiểu Âu:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^{t,x}\left[(X(T) - K)^+\right] \\ &= \int_0^\infty (y - K)^+ p(t_0, T; x, y)\,dy \\ &= e^{\mu(T-t)} x N\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T - t}}\left[\log\frac{x}{K} + \mu(T - t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)\right]\right) \\ &\quad - KN\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T - t}}\left[\log\frac{x}{K} + \mu(T - t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)\right]\right) \end{aligned}$$

trong đó

$$N(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\eta} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\eta}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

Vì thế cho nên:

$$\mathbb{E}^{0,\xi}\left[e^{-\mu(T-t)}\left(X\left(T\right)-K\right)^{+}\Big|\mathcal{F}\left(t\right)\right]=e^{-\mu(T-t)}\mathbb{E}^{t,X(t)}\left[\left(X\left(T\right)-K\right)^{+}\right]$$
$$=X\left(t\right)N\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\log\frac{X\left(t\right)}{K}+\mu\left(T-t\right)+\frac{1}{2}\sigma^{2}\left(T-t\right)\right]\right)$$
$$-e^{-\mu(T-t)}KN\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\log\frac{X\left(t\right)}{K}+\mu\left(T-t\right)-\frac{1}{2}\sigma^{2}\left(T-t\right)\right]\right).$$

Lời giải cua một phương trình vi phân ngẫu nhiên bao giờ cũng là một quá trình Markov. Điều đó được khẳng định bởi định lý sau đây:

Định lý 5.2.1. *Giả sử $X=(X_t)$ là một quá trình ngẫu nhiên thỏa mãn phương trình*

$$dX_t=a(t,X_t)dt+\sigma(t,X_t)dB_t \tag{5.59}$$

trong đó các hệ số $a(t,x)$ và $\sigma(t,x)$ thỏa mãn các điều kiện tồn tại và duy nhất lời giải như đã nêu trong định lý (5.1.1).

Khi đó $X=(X_t)$ là một quá trình Markov mà xác suất chuyển được xác định bởi:

$$p(x,s;t,A)=P\left\{X_s^x(t)\in A\right\}$$

trong đó $X_s^x(t)$ là lời giải của phương trình (5.59) với điều kiện ban đầu x lấy tại một thời điểm ban đầu $s<t$, tức là $X_s=x$; nói cách khác $X_s^x(t)$ là lời giải duy nhất của phương trình:

$$X_s^x(t)=x+\int_s^t a\big(u,X_s^x(u)\big)du+\int_s^t\sigma\big(u,X_s^x(u)\big)dB_u.$$

Trong thực hành kỹ thuật toán tài chính, người ta thường quan tâm xem lời giải của một phương trình vi phân ngẫu nhiên nào đó có phải là một martingale hay không. Ta có kết quả quan trọng sau đây:

Định lý 5.2.2. *Giả sử (X_t) là lời giải của phương trình vi phân ngẫu nhiên*

$$dX=a(t,X)dt+\sigma(t,X)dB,$$

trong đó $\sigma(t,x)$ là liên tục và

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T\sigma^2(t,X)dt\right]<\infty.$$

Khi đó, quá trình (X_t) là một martingale nếu và chỉ nếu độ dịch chuyển bằng 0, tức là $a(t,x)\equiv 0$.

5.2.3 Phương trình Kolmogorov ngược

Xét phương trình

$$dX(t) = a(t, X(t))\,dt + \sigma(t, X(t))\,dB(t),$$

và giả sử $p(t_0, t_1; x, y)$ là mật độ xác suất chuyển. Khi đó phương trình Kolmogorov ngược là:

$$-\frac{\partial}{\partial t_0} p(t_0, t_1; x, y) = a(t_0, x)\frac{\partial}{\partial x} p(t_0, t_1; x, y) + \frac{1}{2}\sigma^2(t_0, x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} p(t_0, t_1; x, y). \tag{5.60}$$

Các biến t_0 và x trong (5.60) được gọi là biến ngược.

Trong trường hợp a và σ là các hàm của một biến x, $p(t_0, t_1; x, y)$ chỉ phụ thuộc vào t_0 và t_1 qua hiệu của chúng $\tau = t_1 - t_0$. Thì ta viết $p(\tau; x, y)$ thay cho $p(t_0, t_1; x, y)$ và phương trình (5.60) trở thành:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} p(\tau; x, y) = a(x)\frac{\partial}{\partial x} p(\tau; x, y) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} p(\tau; x, y).$$

Ví dụ 5.2.3. Xét phương trình:

$$dX(t) = a\,dt + dB(t).$$

$$p(\tau; x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{(y - (x + a\tau))^2}{2\tau}\right\}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tau} p &= p_\tau = \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\right)\exp\left\{-\frac{(y - x - a\tau)^2}{2\tau}\right\} \\
&\quad - \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{(y - x - a\tau)^2}{2\tau}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left\{-\frac{(y - x - a\tau)^2}{2\tau}\right\} \\
&= \left[-\frac{1}{2\tau} + \frac{a(y - x - a\tau)}{\tau} + \frac{(y - x - a\tau)}{2\tau^2}\right] p.
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} p = p_x = \frac{y - x - a\tau}{\tau} p$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} p &= p_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{y - x - a\tau}{\tau}\right) p + \frac{y - x - a\tau}{\tau} p_x \\
&= -\frac{1}{\tau} p + \frac{(y - x - a\tau)^2}{\tau^2} p.
\end{aligned}$$

Vì thế cho nên phương trình KBE là:

$$\begin{aligned} ap_x + \frac{1}{2}p_{xx} &= \left[\frac{a(y-x-a\tau)}{\tau} - \frac{1}{2\tau} + \frac{(y-x-a\tau)^2}{2\tau^2}\right]p \\ &= p_\tau. \end{aligned}$$

Ví dụ 5.2.4. Xét phương trình:

$$dX(t) = \mu X(t)\,dt + \sigma X(t)\,dB(t).$$

$$p(\tau; x, y) = \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi\tau}}\left\{-\frac{1}{2\tau\sigma^2}\left[\log\frac{y}{x} - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right]^2\right\}.$$

Từ đó ta có thể chỉ ra rằng p thoả mãn phương trình KBE:

$$p_\tau = \mu x p_x + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 p_{xx}.$$

5.2.4 Liên hệ giữa tính toán ngẫu nhiên và KBE

Xét phương trình:

$$dX(t) = aX(t)\,dt + \sigma X(t)\,dB(t). \tag{5.61}$$

Giả sử $h(y)$ là một hàm nào đó, ta định nghĩa:

$$v(t,x) = \mathbb{E}^{t,x}[h(X(T))]$$

ở đó $0 \le t \le T$. Khi đó:

$$v(t,x) = \int h(y)\,p(T-t; x, y)\,dy,$$

$$v_t(t,x) = -\int h(y)\,p_t(T-t; x, y)\,dy,$$

$$v_x(t,x) = \int h(y)\,p_x(T-t; x, y)\,dy,$$

$$v_{xx}(t,x) = \int h(y)\,p_{xx}(T-t; x, y)\,dy.$$

Vì thế cho nên, phương trình KBE suy ra:

$$\begin{aligned}
& v_t(t,x) + a(x)\, v_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\, v_{xx}(t,x) \\
= & \int h(y)\left[-p_t(T-t;x,y)\right] dy \\
& + \int h(y)\left[a(x)\, p_x(T-t;x,y) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\, p_{xx}(T-t;x,y)\right] dy \\
= & \ 0.
\end{aligned}$$

Giả sử $(0,\xi)$ là một điều kiện đầu của SDE (5.61), để đơn giản, ta ký hiệu $\mathbb{E}$ thay cho $\mathbb{E}^{0,\xi}$.

Định lý 5.2.3. *Bắt đầu với $X(0)=\xi$, quá trình $v(s,X(s))$ thoả mãn tính chất martingale:*

$$\mathbb{E}\left[v(t,X(t))\,\middle|\,\mathcal{F}(s)\right] = v(s,X(s)) \qquad 0 \le s \le t \le T.$$

Chứng minh. Theo tính chất Markov:

$$\mathbb{E}\left[h(X(T))\,\middle|\,\mathcal{F}(t)\right] = \mathbb{E}^{t,X(t)}\left[h(X(T))\right] = v(t,X(t)),$$

vậy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[v(t,X(t))\,\middle|\,\mathcal{F}(s)\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[h(X(T))\,\middle|\,\mathcal{F}(t)\right]\,\middle|\,\mathcal{F}(s)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[h(X(T))\,\middle|\,\mathcal{F}(s)\right] \\
&= \mathbb{E}^{s,X(s)}\left[h(X(T))\right] \qquad \text{(tính chất Markov)} \\
&= v(s,X(s)).
\end{aligned}$$

Định lý được chứng minh. □

Theo công thức Itô ta có:

$$dv(t,X(t)) = v_t dt + v_x dX + \frac{1}{2}\sigma^2 v_{xx} dt;$$

hay dưới dạng tích phân:

$$\begin{aligned}
v(t,X(t)) &= v(0,X(0)) + \int_0^t \left[v_t(u,X(u)) + a(X(u))\, v_x(u,X(u))\right] du \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \left[\sigma^2(X(u))\, v_{xx}(u,X(u))\right] du \\
&\quad + \int_0^t \sigma(X(u))\, v_x(u,X(u))\, dB(u).
\end{aligned}$$

Ta biết rằng $v(t, X(t))$ là một martingale, vậy tích phân

$$\int_0^t \left[v_t + av_x + \frac{1}{2}\sigma^2 v_{xx}\right] du$$

cần phải bằng không với mọi t. Từ đó suy ra hàm dưới dấu tích phân bằng không, tức là:

$$v_t + av_x + \frac{1}{2}\sigma^2 v_{xx} = 0.$$

Vì thế, từ hai phương trình gốc khác nhau, trên cơ sở KBE và công thức Itô, ta có cùng một kết luận.

Định lý 5.2.4. (Feynman-Kac). *Đặt*

$$v(t, x) = \mathbb{E}^{t,x}[h(X(T))], \qquad 0 \leq t \leq T,$$

trong đó:

$$dX(t) = aX(t)\,dt + \sigma X(t)\,dB(t).$$

Khi đó ta có:

$$v_t(t, x) + av_x(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 v_{xx}(t, x) = 0$$

và

$$v(T, x) = h(x).$$

Phương trình Black-Scholes là một trường hợp đặc biệt của định lý này (chúng ta sẽ chỉ ra trong mục sau).

Chú ý 5.2.1. (Đạo hàm của KBE). *Ta có thể sử dụng công thức Itô để chứng minh Định lý Feynman-Kac, và sử dụng định lý này để suy ra KBE.*

5.2.5 Mô hình Black-Scholes

Xét phương trình vi phân ngẫu nhiên:

$$dS(t) = \mu S(t)\,dt + \sigma S(t)\,dB(t).$$

Với điều kiện đầu

$$S(t) = x,$$

nghiệm của phương trình là:

$$S(u) = x\exp\left\{\sigma\left(B(u) - B(t)\right) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(u-t)\right\}, \qquad u \geq t.$$

Đặt:

$$\begin{aligned} v(t,x) &= \mathbb{E}^{t,x}\left[h\left(S(T)\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[h\left(x\exp\left\{\sigma\left(B(T) - B(t)\right) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right\}\right)\right], \end{aligned}$$

trong đó h là một hàm sẽ được chỉ ra sau.

Theo bổ đề về sự độc lập, ta đã biết: Nếu $\mathcal{G}$ là một σ-trường, X là $\mathcal{G}$-đo được, và Y độc lập đối với $\mathcal{G}$, thì

$$\mathbb{E}\left[h(X,Y)\Big|\mathcal{G}\right] = \gamma(X),$$

trong đó

$$\gamma(x) = \mathbb{E}\left[h(x,Y)\right].$$

Với chuyển động Brown hình học, $0 \leq t \leq T$, ta có:

$$S(t) = S(0)\exp\left\{\sigma B(t) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right\},$$

$$\begin{aligned} S(T) &= \left\{S(0)\exp\sigma B(T) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right\} \\ &= \underbrace{S(t)}_{\mathcal{F}(t)-\text{đo được}} . \underbrace{\exp\left\{\sigma\left(B(T) - B(t)\right) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right\}}_{\text{độc lập với } \mathcal{F}(t)}. \end{aligned}$$

Vì thế ta có:

$$S(T) = XY,$$

trong đó

$$X = S(t),$$

$$Y = \exp\left\{\sigma\left(B(T) - B(t)\right) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right\}.$$

Bây giờ

$$\mathbb{E}\left[h\left(xY\right)\right] = v\left(t, x\right).$$

Bổ đề về sự độc lập suy ra:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[h\left(S\left(T\right)\right)\Big|\mathcal{F}(t)\right] &= \mathbb{E}\left[h\left(X, Y\right)\Big|\mathcal{F}(t)\right] \\ &= v\left(t, X\right) \\ &= v\left(t, S\left(t\right)\right).\end{aligned}$$

Vậy ta đã chỉ ra rằng:

$$v\left(t, S\left(t\right)\right) = \mathbb{E}\left[h\left(S\left(T\right)\right)\Big|\mathcal{F}(t)\right], \qquad 0 \le t \le T.$$

Nhận thấy rằng, kỳ vọng điều kiện của biến ngẫu nhiên $h\left(S\left(T\right)\right)$ không phụ thuộc vào t. Do đó, từ tính chất tháp suy ra $v\left(t, S\left(t\right)\right)$ là một martingale. Với $0 \le s \le t \le T$, ta có:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[v\left(t, S\left(t\right)\right)\Big|\mathcal{F}(s)\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[h\left(S\left(T\right)\right)\Big|\mathcal{F}(t)\right]\Big|\mathcal{F}(s)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[h\left(S\left(T\right)\right)\Big|\mathcal{F}(s)\right] \\ &= v\left(s, S\left(s\right)\right).\end{aligned}$$

Đây là một trường hợp đặc biệt của Định lý Feynman-Kac.

Vì $v\left(t, S\left(t\right)\right)$ là một martingale, tổng của các số hạng chứa dt trong $dv\left(t, S\left(t\right)\right)$ cần phải bằng 0. Theo công thức Itô:

$$\begin{aligned}dv\left(t, S\left(t\right)\right) &= \left[v_t\left(t, S\left(t\right)\right)dt + \mu S\left(t\right)v_x\left(t, S\left(t\right)\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\left(t\right)v_{xx}\left(t, S\left(t\right)\right)\right]dt \\ &\quad + \sigma S\left(t\right)v_x\left(t, S\left(t\right)\right)dB\left(t\right).\end{aligned}$$

Điều này đưa đến phương trình:

$$v_t\left(t, x\right) + \mu x v_x\left(t, x\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}\left(t, x\right) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \quad x \ge 0.$$

Đây là một trường hợp đặc biệt của Định lý Feynman-Kac.

Theo phương trình vi phân đạo hàm riêng ở trên, ta có điều kiện giới hạn

$$v\left(T, x\right) = h\left(x\right), \qquad x \ge 0.$$

Hơn nữa, nếu $S(t) = 0$ với $t \in [0, T]$ nào đó, thì $S(T) = 0$. Điều này cho ta điều kiện bị chặn

$$v(t, 0) = h(0), \quad 0 \le t \le T.$$

Cuối cùng, ta nhận thấy rằng giá trị tại thời điểm t của mục tiêu ngẫu nhiên $h(S(T))$ là:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= e^{-\mu(T-t)}\mathbb{E}^{t,x}[h(S(T))] \\ &= e^{-\mu(T-t)}v(t, x) \end{aligned}$$

tại thời điểm t nếu $S(t) = x$. Vì thế cho nên:

$$v(t, x) = e^{\mu(T-t)}u(t, x),$$

$$v_t(t, x) = -e^{\mu(T-t)}u(t, x) + e^{\mu(T-t)}u_t(t, x),$$
$$v_x(t, x) = e^{\mu(T-t)}u_x(t, x),$$
$$v_{xx}(t, x) = e^{\mu(T-t)}u_{xx}(t, x).$$

Thêm công thức này vào phương trình đạo hàm riêng với v và bỏ $e^{\mu(T-t)}$ xuất hiện trong mọi số hạng, ta thu được phương trình đạo hàm riêng Black-Scholes:

$$-\mu u(t, x) + u_t(t, x) + \mu x u_x(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx}(t, x) = 0, \quad 0 \le t \le T, \quad x \ge 0.$$

Đây chính là phương trình đạo hàm riêng Black-Scholes đã nêu trong mục 4.2.5.

Trong các số hạng của mật độ chuyển

$$p(t, T; x, y) = \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi(T-t)}}\left\{-\frac{1}{2(T-t)\sigma^2}\left[\log\frac{y}{x} - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right]^2\right\}.$$

với chuyển động Brown hình học (xem ví dụ 5.2.2), ta có biểu diễn ngẫu nhiên

$$\begin{aligned} u(t, x) &= e^{-\mu(T-t)}\mathbb{E}^{t,x}[h(S(T))] \\ &= e^{-\mu(T-t)}\int_0^\infty h(y)\, p(t, T; x, y)\, dy. \end{aligned}$$

Trong trường hợp của một quyền chọn mua:

$$h(y) = (y - K)^+$$

và

$$\begin{aligned} u(t,x) &= xN\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\log\frac{x}{K}+\mu(T-t)+\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right]\right) \\ &\quad -e^{-\mu(T-t)}KN\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\log\frac{x}{K}+\mu(T-t)-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right]\right). \end{aligned}$$

Ngay cả nếu $h(y)$ là hàm nào đó khác (chẳng hạn $h(y) = (K-y)^+$, với một quyền chọn bán), $u(t,x)$ vẫn được cho bởi phương trình đạo hàm riêng Black-Scholes nhận được ở trên.

5.2.6 Mô hình Black-Scholes với độ biến động giá độc lập

Xét mô hình:

$$dS(t) = \mu S(t)\,dt + \beta S(t)\,dB(t),$$
$$v(t,x) = e^{-\mu(T-t)}\mathbb{E}^{t,x}\left[(S(T)-K)^+\right].$$

Định lý Feynman-Kac suy ra rằng:

$$-\mu v(t,x) + v_t(t,x) + \mu x v_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2x^2v_{xx}(t,x) = 0, \quad 0 \le t \le T, \quad x \ge 0.$$

v cũng thoả mãn điều kiện cuối:

$$v(T,x) = (x-K)^+, \quad x \ge 0,$$

và điều kiện bị chặn:

$$v(t,0) = 0, \quad 0 \le t \le T.$$

Một ví dụ là quá trình cho bởi Cox (1975):

$$dS(t) = \mu S(t)\,dt + \sigma S^\delta(t)\,d(B(t)); \quad 0 \le t \le T,$$

trong đó $0 \le \delta \le 1$. Độ biến động $\sigma S^{\delta-1}(t)$ giảm khi giá cổ phiếu tăng. Biểu diễn của phương trình Black-Scholes là:

$$\begin{aligned} -rv + v_t + rxv_x + \frac{1}{2}\sigma^2x^{2\delta}v_{xx} = 0, &\quad 0 \le t \le T, \quad x > 0; \\ v(t,0) = 0, &\quad 0 \le t \le T \\ v(T,x) = (x-K)^+, &\quad x > 0. \end{aligned}$$

5.3 Phương trình vi phân ngẫu nhiên nhiều chiều

Nhiều bài toán trong tài chính đưa đến việc giải các phương trình vi phân ngẫu nhiên dạng vectơ:

$$dX_t = hdt + fdB_t, \qquad (5.62)$$

trong đó $X_t = (X_t^1, X_t^2, ..., X_t^n)^T$, $B_t = (B_t^1, B_t^2, ..., B_t^m)^T$, M, N là các ma trận

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2m} \\ .. & .. & \dots & .. \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nm} \end{pmatrix}.$$

Phương trình (5.62) luôn có thể viết dưới dạng một hệ phương trình vi phân:

$$\begin{cases} dX_1 = h_1dt + f_{11}dB_t^1 + f_{12}dB_t^2 + ...f_{1m}dB_t^m \\ dX_2 = h_2dt + f_{21}dB_t^1 + f_{22}dB_t^2 + ...f_{2m}dB_t^m \\ \dots \\ dX_n = h_ndt + f_{n1}dB_t^1 + f_{n2}dB_t^2 + ...f_{nm}dB_t^m \end{cases}$$

Trong phạm vi của giáo trình này, chúng tôi chỉ giới thiệu một số phương trình vi phân ngẫu nhiên vectơ dạng đơn giản ít nhiều có ứng dụng trong tài chính. Để giải các phương trình này chúng ta sử dụng công thức Itô nhiều chiều hoặc sử dụng các biến đổi đại số đưa hệ đã cho về hệ các phương trình một ẩn số để từ đó có thể áp dụng các phương pháp giải phương trình vi phân ngẫu nhiên một chiều đã biết.

Ví dụ 5.3.1. Giải phương trình vi phân ngẫu nhiên:

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} X_2 \\ X_1 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} dB_t,$$

trong đó $(X_1; X_2) = (X_1(t); X_2(t))$, $t \geq 0$, $(X_1(0); X_2(0)) = (1; 0)$.
Giải: Ta viết lại phương trình đã cho dưới dạng hệ phương trình:

$$\begin{cases} dX_1 = \frac{1}{2}X_2dt + X_1dB_t \\ dX_2 = \frac{1}{2}X_1dt + X_2dB_t \end{cases}$$

Từ đó ta có hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} d(X_1 + X_2) = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)dt + (X_1 + X_2)dB_t \\ d(X_1 - X_2) = -\frac{1}{2}(X_1 - X_2)dt + (X_1 - X_2)dB_t \end{cases}$$

Mỗi phương trình của hệ có dạng (5.6) nên nghiệm tổng quát của hệ là:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = (X_1(0) + X_2(0))\exp(B_t) = \exp(B_t) \\ X_1 - X_2 = (X_1(0) - X_2(0))\exp(-t + B_t) = \exp(-t + B_t) \end{cases}$$

Từ đó suy ra lời giải của phương trình đã cho là:

$$\begin{cases} X_1(t) = \frac{1}{2}\exp(B_t)(1 + \exp(-t)) \\ X_2(t) = \frac{1}{2}\exp(B_t)(1 - \exp(-t)). \end{cases}$$

Ví dụ 5.3.2. Giải phương trình vi phân ngẫu nhiên:

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -X_2 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-X_1} \end{bmatrix} dB_t, \qquad \begin{bmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Giải: Ta viết lại phương trình đã cho dưới dạng hệ phương trình:

$$\begin{cases} dX_1 = dt \\ dX_2 = -X_2 dt + e^{-X_1} dB_t \end{cases}$$

Tích phân phương trình thứ nhất của hệ ta có:

$$X_1(t) = t.$$

Thay vào phương trình thứ hai ta có:

$$dX_2 = -X_2 dt + e^{-t} dB_t.$$

Đây là phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính dạng (5.11) nên lời giải là:

$$\begin{aligned} X_2(t) &= e^{-t}\left[X_2(0) + \int_0^t e^{-s}e^{s} dB_s\right] \\ &= e^{-t}B_t. \end{aligned}$$

Từ đó ta có lời giải của phương trình đã cho.

Ví dụ 5.3.3. Giải phương trình vi phân ngẫu nhiên:

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dB_1 \\ dB_2 \end{bmatrix},$$

trong đó $(X_1(0); X_2(0)) = (0; 0)$; $(X_1; X_2) = (X_1(t); X_2(t))$, và chuyển động Brown hai chiều $(B_1; B_2) = (B_1(t); B_2(t))$, $t \geq 0$.
Giải: Ta viết lại phương trình đã cho dưới dạng hệ phương trình:

$$\begin{cases} dX_1 = dt + dB_1 \\ dX_2 = dt + X_1 dB_2 \end{cases}$$

Phương trình thứ nhất của hệ có dạng (5.11) nên dễ thấy nghiệm của phương trình này là:

$$X_1(t) = t + B_1(t).$$

Thay vào phương trình thứ hai ta được:

$$dX_2 = dt + (t + B_1)dB_2.$$

Tích phân hai vế ta được nghiệm của phương trình này là:

$$X_2(t) = t + \int_0^t (s + B_1(s))dB_2(s).$$

Từ đó suy ra lời giải của phương trình đã cho.

Ví dụ 5.3.4. Giải phương trình vi phân ngẫu nhiên:

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} t & 0 \\ 1 & 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dB_1 \\ dB_2 \end{bmatrix}.$$

trong đó $(X_1(0); X_2(0)) = (0; 0)$; $(X_1; X_2) = (X_1(t); X_2(t))$, và chuyển động Brown hai chiều $(B_1; B_2) = (B_1(t); B_2(t))$, $t \geq 0$.
Giải: Ta viết lại phương trình đã cho dưới dạng hệ phương trình:

$$\begin{cases} dX_1 = dt + tdB_1 \\ dX_2 = dt + dB_1 + 2tdB_2 \end{cases}$$

Tích phân phương trình thứ nhất của hệ ta có:

$$X_1(t) = t + \int_0^t sdB_1(s).$$

Sử dụng công thức tích phân từng phần ta có:

$$X_1(t) = t + tB_1(t) - \int_0^t B_1(s)ds.$$

Tương tự với phương trình thứ hai ta có:

$$\begin{aligned} X_2(t) &= t + B_1(t) + \int_0^t 2sdB_2(s) \\ &= t + B_1(t) + 2tB_2(t) - 2\int_0^t B_2(s)ds. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra lời giải của phương trình đã cho là:

$$\begin{cases} X_1(t) = t + tB_1(t) - \int_0^t B_1(s)ds \\ X_2(t) = t + B_1(t) + 2tB_2(t) - 2\int_0^t B_2(s)ds. \end{cases}$$

5.4 Mô phỏng ngẫu nhiên

5.4.1 Mô phỏng các quá trình ngẫu nhiên

Trong phân tích tài chính, ta thường gặp nhu cầu phải mô phỏng các quá trình ngẫu nhiên như: giá S_t trong mô hình Black-Scholes, tỷ giá của một ngoại tệ so với đồng Việt nam, lợi suất của danh mục đầu tư,... từ đó có thể dự đoán xu hướng diễn biến của quá trình trong tương lai cũng như đánh giá dược độ biến động của các quá trình này. Trong mục này, chúng ta xem xét một số phương pháp số mô phỏng các quá trình ngẫu nhiên, từ đó xây dựng thuật toán mô phỏng các quá trình tài chính thường gặp. Để nắm được phần này, người học cần có hiểu biết về phương pháp Euler, phương pháp Monte Carlo với phương trình vi phân tất định (xem các tài liệu [2], [10]) và một số khái niệm về lý thuyết xác suất và quá trình ngẫu nhiên. Do khuôn khổ của giáo trình nên ở đây chỉ giới thiệu một số phương pháp đơn giản mô phỏng chuyển động Brown, mô phỏng các phương trình vi phân ngẫu nhiên và một số chương trình MATLAB đơn giản mô tả các phương pháp đó. Người học có thể tìm hiểu sâu hơn về mô phỏng ngẫu nhiên qua các nghiên cứu của Desmond J. Higham trong tài liệu [2].

5.4.2 Mô phỏng chuyển động Brown

Như ta đã biết, một chuyển động Brown tiêu chuẩn, hoặc một quá trình Wiener tiêu chuẩn trên $[0, T]$ là một biến ngẫu nhiên $W(t)$ liên tục theo t trên $[0, T]$ và thỏa mãn ba điều kiện:

1. $W(0) = 0$ (với xác suất 1).

2. Với $0 \leq s < t \leq T$ số gia $W(t) - W(s)$ là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với kỳ vọng 0 và phương sai $t - s$.

3. Với $0 \leq s < t < u < v \leq T$ các số gia $W(t) - W(s)$ và $W(v) - W(u)$ là các biến ngẫu nhiên độc lập.

Để mô phỏng chuyển động Brown $(W_t)_{t\geqslant 0}$ người ta thường dùng các phương pháp sau:

Phương pháp 1:

Cho $(X_i)_{i\geqslant 0}$ là một dãy biến ngẫu nhiên độc lập và cùng phân bố bởi luật

$$P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2} \Rightarrow E(X_i) = 0, E\left(X_i^2\right) = 1.$$

Đặt $S_n = X_1 + ... + X_n$. Khi đó ta có thể "xấp xỉ" chuyển động Brown $(W_t)_{t\geqslant 0}$ bởi quá trình $(X_t^n)_{t\geqslant 0}$ trong đó

$$X_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]},$$

với $[x]$ là phần nguyên của x.

Phương pháp 2:

Cho $(g_i)_{i\geqslant 0}$ là một dãy biến ngẫu nhiên chuẩn quy tâm độc lập, nếu $\Delta t > 0$ và nếu ta đặt

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_{n+1} - S_n = g_n \end{cases}$$

Khi đó luật phân bố của $\left(\sqrt{\Delta t} S_0, \sqrt{\Delta t} S_1, ..., \sqrt{\Delta t} S_n\right)$ cũng là luật của

$$(W_0, W_{\Delta t}, W_{2\Delta t}, ..., W_{n\Delta t}).$$

Ta có thể xấp xỉ chuyển động Brown bởi:

$$X_t^n = \sqrt{\Delta t} S_{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]} = \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]} g_i.$$

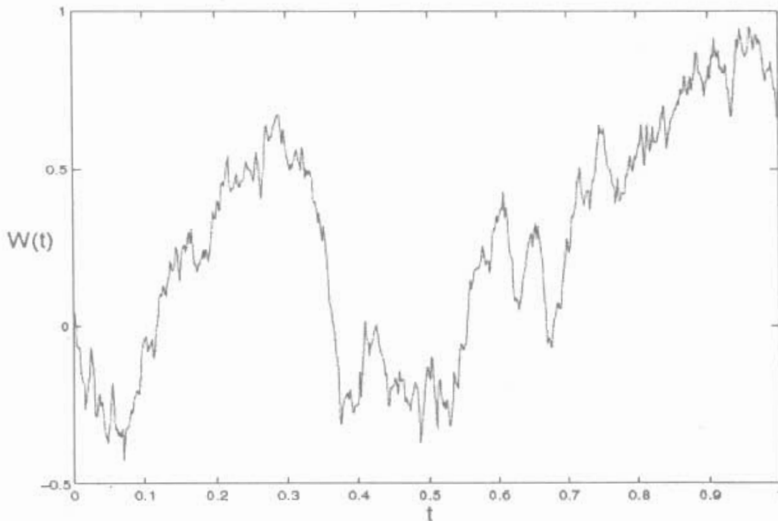
Để minh họa, sau đây chúng ta sử dụng phương pháp 2 để mô phỏng một chuyển động Brown. Đặt $\delta t = T/N$ với số nguyên dương N nào đó và ký hiệu W_j thay cho $W(t_j)$ với $t_j = j\delta t$. Từ điều kiện 1 ta có $W_0 = 0$ với xác suất 1, điều kiện 2 và 3 cho thấy rằng $W_j = W_{j-1} + dW_j, j = 1, 2, ..., N$, trong đó mỗi dW_j là một biến ngẫu nhiên độc lập có dạng $\sqrt{\delta t}N(0,1)$. Thuật toán MATLAB sau đây cho ta một cách mô phỏng quỹ đạo mẫu của chuyển động Brown.

Ví dụ 5.4.1. Mô phỏng quỹ đạo chuyển động Brown (M-file *brown1.m*).

```
randn('state',100)   % đặt trạng thái của randn
T = 1; N = 500; dt = T/N;
dW = zeros(1,N);   % khởi tạo mảng ...
W = zeros(1,N);
dW(1) = sqrt(dt)*randn;   % vòng lặp đầu tiên ...
W(1) = dW(1);   % vì W(0) = 0 không được phép
for j = 2:N
dW(j) = sqrt(dt)*randn;   % số gia tổng quát
W(j) = W(j-1) + dW(j);
end
plot([0:dt:T],[0,W],'r-')   % vẽ W dựa vào t
xlabel('t','FontSize',16)
ylabel('W(t)','FontSize',16,'Rotation',0)
```

Thuật toán trong M-file *brown1.m* ở trên mô phỏng chuyển động Brown rời rạc trên $[0,1]$ với $N = 500$. Ở đây, ta sử dụng thủ tục randn để sinh số ngẫu nhiên, mỗi lần gọi thủ tục randn cho một số "giả ngẫu nhiên" độc lập từ biến ngẫu nhiên có phân phối $N(0,1)$. MATLAB cho phép đặt trạng thái ban đầu sinh số ngẫu nhiên, chẳng hạn, ta đặt trạng thái là 100 với câu lệnh randn('state',100). Có thể thiết lập các mô phỏng khác bằng cách đặt lại trạng thái, chẳng hạn, randn('state',200). Các số được sinh ra từ thủ tục randn với tỷ lệ $\sqrt{\delta t}$ và được sử dụng như các số gia trong vòng lặp mà tạo ra mảng 1-N của W. Chú ý rằng MATLAB bắt đầu mảng từ chỉ số 1 chứ không phải chỉ số 0. Do đó, chúng ta tính W như $W(1), W(2), ..., W(N)$ và sử dụng plot([0:dt:T],[0,W]) để có giá trị ban đầu $W(0) = 0$ trong hình vẽ. Hình 5.1 cho kết quả của thuật toán trên; chú ý rằng để dễ hình dung, các điểm rời rạc được nối liền bởi các đoạn thẳng. Chúng ta sẽ coi mảng W được tạo bởi thuật toán trong *brown1.m* như một quỹ đạo chuyển động Brown rời rạc.

Chúng ta có thể thực hiện các tính toán tương tự một cách hiệu quả hơn bằng cách thay thế vòng lặp với mức độ cao hơn bằng các lệnh "vectơ" như



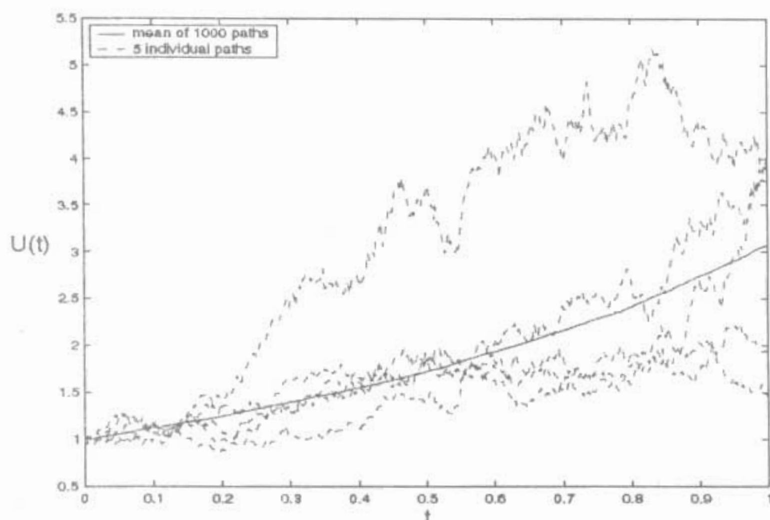
Hình 5.1: Rời rạc hóa quỹ đạo chuyển động Brown từ *brown1.m* và *brown2.m*.

trong thuật toán *brown2.m* dưới đây. Ở đây ta cung cấp 2 đối số cho toán tử sinh số ngẫu nhiên: randn(1,N) tạo một mảng 1-N từ các mẫu $N(0,1)$ độc lập. Hàm cộng dồn cumsum cộng tổng của các đối số của nó, do vậy phần tử thứ j của mảng (1,N) của W là: $dW(1) + dW(2) + ... + dW(j)$.

Ví dụ 5.4.2. Mô phỏng quỹ đạo Brown: vectơ (M-file *brown2.m*)

```
randn('state',100)   % đặt trạng thái của randn
T = 1; N = 5 0; dt = T/N;
dW = sqrt(dt)*randn(1,N);   % các số gia
W = cumsum(dW);   % tổng cộng dồn
plot([0:dt:T],[0,W],'r-')   % vẽ W
xlabel('t','FontSize',16)
ylabel('W(t)','FontSize',16,'Rotation',0)
```

Trong hình 5.1, mặc dù $u(W(t))$ không trơn dọc theo quỹ đạo gốc, trung bình mẫu của nó xuất hiện là trơn. Điều này có thể thiết lập giá trị kỳ vọng $u(W(t))$ trở lại với $exp(9t/8)$. Thuật toán trong *brown3.m* sau đây khẳng định sự khác nhau trên các bản ghi trên lớn nhất giữa trung bình mẫu và giá trị kỳ vọng chính xác trên tất cả các điểm t_j. Chúng ta thấy rằng $averr = 0.0504$. Số các quỹ đạo mẫu tăng dần tới 4000 với gia số 0.0268.



Hình 5.2: Hàm $u(W(t))$ lấy trung bình trên 1000 quỹ đạo chuyển động Brown rời rạc và dọc theo 5 quỹ đạo đặc biệt.

Ví dụ 5.4.3. Hàm dọc theo một quỹ đạo Brown (M-file *brown3.m*)

```
randn('state',100)  % Đặt trạng thái của  randn
T = 1; N = 5 0; dt = T/N; t = [dt:dt:1];
M = 1000;  % mô phỏng M quỹ đạo
dW = sqrt(dt)*randn(M,N);  % các số gia
W = cumsum(dW,2);  % tổng cộng dồn
U = exp(repmat(t,[M 1]) + 0.5*W);
Umean = mean(U);
plot([0,t],[1,Umean],'b-'), hold on  % vẽ trung bình của M quỹ đạo
plot([0,t],[ones(5,1),U(1:5,:)],'r–'), hold off  % vẽ 5 quỹ đạo cá biệt
xlabel('t','FontSize',16)
ylabel('U(t)','FontSize',16,'Rotation',0,'HorizontalAlignment','right')
legend('mean of 1000 paths','5 individual paths',2)
averr = norm((Umean - exp(9*t/8)),'inf')  % sai số mẫu
```

Lưu ý rằng, $u(W(t))$ trong hình 5.2 là nghiệm của một phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính. Trong một vài ứng dụng, nghiệm được yêu cầu với một quỹ đạo đã cho được gọi là quỹ đạo mẫu hay nghiệm mạnh. Ở đây, ta chỉ quan tâm dạng thông tin về giá trị kỳ vọng của nghiệm mà không quan

tâm đến mức độ yếu của sự hội tụ.

5.4.3 Mô phỏng tích phân ngẫu nhiên

Cho hàm khả đoán h, tích phân $\int_0^t h(t)dt$ có thể xấp xỉ bởi tổng Riemann

$$\sum_{j=0}^{N-1} h(t_j)(t_{j+1} - t_j), \tag{5.63}$$

trong đó các điểm rời rạc $t_j = jdt$. Thực vậy, tích phân có thể định nghĩa bởi lấy giới hạn khi $dt \to 0$ trong (5.63). Một cách tương tự, ta xấp xỉ tích phân ngẫu nhiên Itô $\int_0^t h(t)dW(t)$ bởi tổng dạng

$$\sum_{j=0}^{N-1} h(t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j)), \tag{5.64}$$

và tích phân ngẫu nhiên Stratonovich $\int_0^t h(t) \circ dW(t)$ được xấp xỉ bởi tổng dạng:

$$\sum_{j=0}^{N-1} h\left(\frac{t_j + t_{j+1}}{2}\right)(W(t_{j+1}) - W(t_j)), \tag{5.65}$$

trong đó các tích phân của h lấy đối với chuyển động Brown. Thuật toán xấp xỉ tích phân ngẫu nhiên như sau:

Ví dụ 5.4.4. Xấp xỉ tích phân ngẫu nhiên Itô và tích phân ngẫu nhiên Stratonovich (M-file *stint.m*)

```
randn('state',100)  % đặt trạng thái của randn
T = 1; N = 5 0; dt = T/N;
dW = sqrt(dt)*randn(1,N);  % các số gia
W = cumsum(dW);  % tổng cộng dồn
ito = sum([0,W(1:end-1)].*dW)
strat = sum((0.5*([0,W(1:end-1)]+W) + 0.5*sqrt(dt)*randn(1,N)).*dW)
itoerr = abs(ito - 0.5*(W(end)^2-T))
straterr = abs(strat - 0.5*W(end)^2)
```

Trong M-file *stint.m* ở trên, chúng ta tạo một quỹ đạo chuyển động Brown trên $[0, 1]$ với $dt = 1/N = 1/500$ với dạng tổng (5.64) và (5.65) cho trường hợp $h(t)$ là $W(t)$. Trong đó .* biểu diễn phép nhân, [0,W(1:end-1)].*dW biểu diễn

mảng $1 - N$ mà số hạng Itô thứ j là W(j-1)*dW(j). Hàm sum được sử dụng để lấy tổng, kết quả $ito = -0.2674$ và $strat = 0.2354$. Nhận thấy rằng, hai "tổng ngẫu nhiên Riemann" (5.64) và (5.65) cho các câu trả lời khác biệt rõ rệt. Hơn nữa, thực nghiệm với dt nhỏ hơn cho thấy rằng sự phối hợp này không cho kết quả khi $\delta t \to 0$.

Như ta đã biết, tích phân ngẫu nhiên được xấp xỉ trong *stint.m* có thể đánh giá chính xác như sau:

$$\int_0^T W(t)dW(t) = \frac{1}{2}W(T)^2 - \frac{1}{2}T; \qquad \int_0^T W(t) \circ dW(t) = \frac{1}{2}W(T)^2.$$

Sai số giữa các xấp xỉ Itô và và xấp xỉ Stratonovich trong M-file *stint.m* so với các giá trị chính xác ở trên là $itoerr = 0.0158$ và $straterr = 0.0186$. Tuy nhiên, không phải khi nào ta cũng có thể tính chính xác tích phân Itô và tích phân Stratonovich như trên. Do vậy, trong thực hành, các thuật toán xấp xỉ tích phân Itô và tích phân Stratonovich ở trên thường được sử dụng. Trong mục sau, chúng ta xấp xỉ nghiệm của một phương trình vi phân ngẫu nhiên dạng Itô (trường hợp SDE có thể làm tương tự bằng cách sử dụng liên hệ giữa dạng Itô và dạng Stratonovich).

5.4.4 Mô phỏng nghiệm các phương trình vi phân ngẫu nhiên

Một phương trình vi ngẫu nhiên dạng:

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW(t), X(0) = X_0, 0 \leq t \leq T, \tag{5.66}$$

ở đó. f và g là các hàm vô hướng và điều kiện đầu X_0 là một biến ngẫu nhiên. Nếu $g = 0$ và X_0 là hằng số, thì (5.66) trở thành phương trình vi phân thường:

$$dX(t)/dt = f(X(t)), \quad \text{với } X(0) = X_0.$$

Phương trình (5.66) có thể viết dưới dạng tích phân:

$$X(t) = X0 + \int_0^t f(X(s))ds + \int_0^t g(X(s))dW(s), X(0) = X_0, 0 \leq t \leq T. \tag{5.67}$$

Tích phân thứ hai trong vế phải của (5.67) là một tích phân Itô. Với mỗi t, nghiệm $X(t)$ là một biến ngẫu nhiên. Chúng ta xây dựng một phương pháp

số để giải (5.67) sao cho khi ta lấy đường kính của các phân hoạch dần tới 0 ta thu được $X(t)$.

Để áp dụng một phương pháp số cho (4.2) trên $[0, T]$, trước tiên ta rời rạc hóa khoảng thời gian. Giả sử $\Delta t = T/L$ với số nguyên dương L nào đó, và $t_j = j\Delta t$. Xấp xỉ số của $X(t_j)$ sẽ được ký hiệu là X_j. Phương pháp Euler-Maruyama (EM) xác định như sau:

$$X_j = X_{j-1} + f(X_{j-1})\Delta t + g(X_{j-1})(W(t_j) - W(t_{j-1})), j = 1, 2, ..., L. \quad (5.68)$$

Công thức này thu được từ việc xấp xỉ các số hạng tương ứng trong vế phải của (5.67):

$$X(t_j) = X(t_{j-1}) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(X(s))ds + \int_{t_{j-1}}^{t_j} g(X(s))dW(s).$$

Dễ dàng nhận thấy, trong trường hợp tất định ($g = 0$ và X_0 là hằng số), (5.68) trở thành phương pháp Euler với phương trình vi phân thường.

$(X(t_j))_{t\geqslant 0}$ xấp xỉ $(X(t))_{t\geqslant 0}$ theo nghĩa sau:

Định lý 5.4.1. *Với mọi* $T > 0$:

$$E\left[\sup_{t<T} |X(t_j) - X(t)|^2\right] \leq C_T.\Delta T,$$

trong đó C_T *là hằng số phụ thuộc vào* T.

Ở đây, luật phân bố của họ $\left(W_{(j+1)\Delta t} - W_{j\Delta t}\right)$ đồng nhất với luật của họ các biến ngẫu nhiên chuẩn quy tâm với phương sai Δt. Ta sử dụng quỹ đạo chuyển động Brown rời rạc để sinh các số gia $W(t_j) - W(t_{j-1})$ cần trong (5.68). Để thuận tiện, ta luôn chọn độ dài Δt là một bội số nguyên của số gia dt với quỹ đạo chuyển động Brown. Ta cũng có thể thay thế $\left(W_{(j+1)\Delta t} - W_{j\Delta t}\right)$ bởi $g_j\sqrt{\Delta t}$ trong đó $(g_j)_{j\geqslant 0}$ là họ các biến ngẫu nhiên chuẩn quy tâm độc lập (xem tài liệu [4], [10]).

Để minh họa, ta sẽ sử dụng phương pháp EM cho phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính:

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t), X(0) = X_0, \quad (5.69)$$

trong đó μ và σ là các hằng số thực. Đây là trường hợp riêng của (5.66) với $f(X) = \mu X$ và $g(X) = \sigma X$. Phương trình vi phân ngẫu nhiên này có nhiều ứng dụng, chẳng hạn, để mô tả giá tài sản trong tài chính (mô hình Black-Scholes).

Ví dụ 5.4.5. Phương pháp Euler-Maruyama với SDE tuyến tính (M-file *em.m*)

```
randn('state',100)
mu = 2; si = 1; Xzero = 1;   % các tham số của bài toán
T = 1; N = 2^8; dt = 1/N;
dW = sqrt(dt)*randn(1,N);   % các số gia Brown
W = cumsum(dW);   % rời rạc hóa quỹ đạo Brownh
Xtrue = Xzero*exp((mu-0.5*si^2)*([dt:dt:T])+si*W);
plot([0:dt:T],[Xzero,Xtrue],'m-'), hold on
R = 4; Dt = R*dt; L = N/R;   % các bước EM với khoảng cách Dt = R*dt
Xem = zeros(1,L);
Xtemp = Xzero;
for j = 1:L
Winc = sum(dW(R*(j-1)+1:R*j));
Xtemp = Xtemp + Dt*mu*Xtemp + si*Xtemp*Winc;
Xem(j) = Xtemp;
end
plot([0:Dt:T],[Xzero,Xem],'r--*'), hold off
xlabel('t','FontSize',12)
ylabel('X','FontSize',16,'Rotation',0,'HorizontalAlignment','right')
emerr = abs(Xem(end)-Xtrue(end))
```

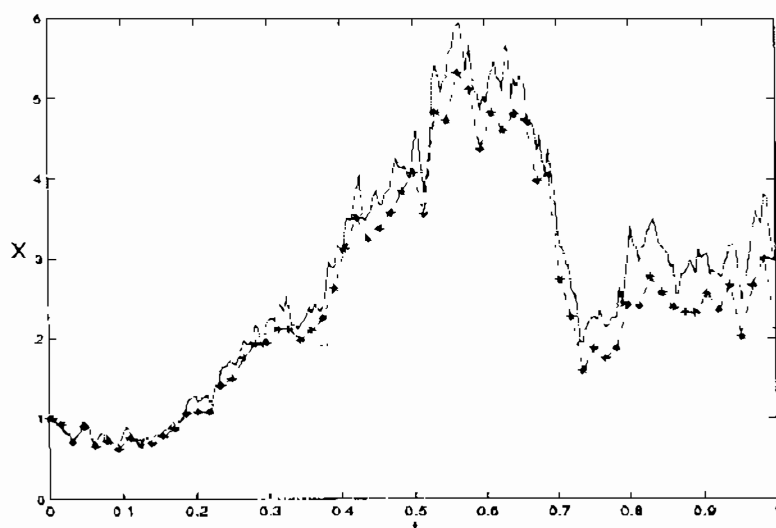
Ta đã biết rằng nghiệm chính xác của SDE này là:

$$X(t) = X(0)\exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)\right]. \tag{5.70}$$

Trong M-file *em.m* chúng ta xét (5.69) với $\mu = 2, \sigma = 1$, và $X_0 = 1$ (hằng số). Ta tính một quỹ đạo Brown rời rạc trên $[0, 1]$ với $dt = 2^{-8}$ và đánh giá nghiệm trong (5.70) là *Xtrue*. Quỹ đạo nghiệm đươc cho trong hình 5.3, ở đây EM sử dụng một khoảng thời gian $\Delta t = Rdt$, với $R = 4$. Một cách tổng quát, phương pháp EM (5.68) yêu cầu số gia $W(t_j) - W(t_{j-1})$, được cho bởi:

$$W(t_j) - W(t_{j-1}) = W(jRdt) - W((j-1)Rdt) = \sum_{k=jR-R+1}^{jR} dW_k.$$

Trong *em.m* đẳng thức này cho bởi Winc = sum(dW(R*(j-1)+1:R*j)). Mảng 1-L Xem lưu trữ nghiệm EM, được vẽ trong hình 5.3 như đường dấu hoa thị. Sự khác nhau nhau giữa nghiệm chính xác và nghiệm xấp xỉ tại điểm cuối $t = T$,



Hình 5.3: Nghiệm đúng và xấp xỉ EM, từ em.m.

được tính như sai số EM, ở đây, sai số tìm được là 0.6907. Lấy $\Delta t = Rdt$ với giá trị R nhỏ hơn, ta nhận được các sai số cuối nhỏ hơn.

5.4.5 Mô phỏng các quá trình tài sản trong mô hình Black - Scholes

Mô hình Black - Sholes

Ta đã biết, mô hình Black-Scholes mô tả giá tài sản $S(t)$ như một quá trình ngẫu nhiên phụ thuộc vào t

$$\begin{cases} S_0 = S(0) \\ dS_t = S_t\left(\mu dt + \sigma dW_t\right), \end{cases}$$

trong đó:

- tham số μ là tỷ lệ tăng trưởng kỳ vọng của tài sản,
- tham số σ là độ biến động của tài sản,
- W_t là một chuyển động Brown.

Để mô phỏng trên máy tính, ta cần biết cách sinh ra quỹ đạo rời rạc của tài sản.

Cách 1: Phương pháp Euler-Maruyama

Giả định cho $S_0 = S(0)$, giá $S(t_i)$ tại thời điểm $t = t_i = i\Delta t$ có thể được sinh từ công thức truy hồi:

$$S(t_{i+1}) = S(t_i)\exp\left[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\xi_i\right],$$

trong đó ξ_i là một mẫu sinh ra từ một số giả ngẫu nhiên có phân phối chuẩn $N(0,1)$ (xem ví dụ 5.4.5).

Cách 2: Sử dụng lời giải hiển

$$S_t = S_0\exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right)$$

rồi mô phỏng chuyển động Brown theo một trong hai phương pháp nêu trên.

Nếu mô phỏng chuyển động Brown bởi $\sqrt{\Delta t}\sum_{i=1}^{n} g_i$ ta được:

$$S_n = S_0\exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)n\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\sum_{i=1}^{n} g_i\right].$$

Ví dụ 5.4.6. Trong MATLAB, chúng ta có thể tính và vẽ quỹ đạo như sau:

```
» T = 1; N = 100; Dt = T/N, mu = 0.1; sigma = 0.3; Szero = 1;
» Spath = Szero*cumprod(exp((mu-0.5*sigma^2)*Dt+sigma*sqrt(Dt)*randn(N,1)));
» plot(Spath)
```

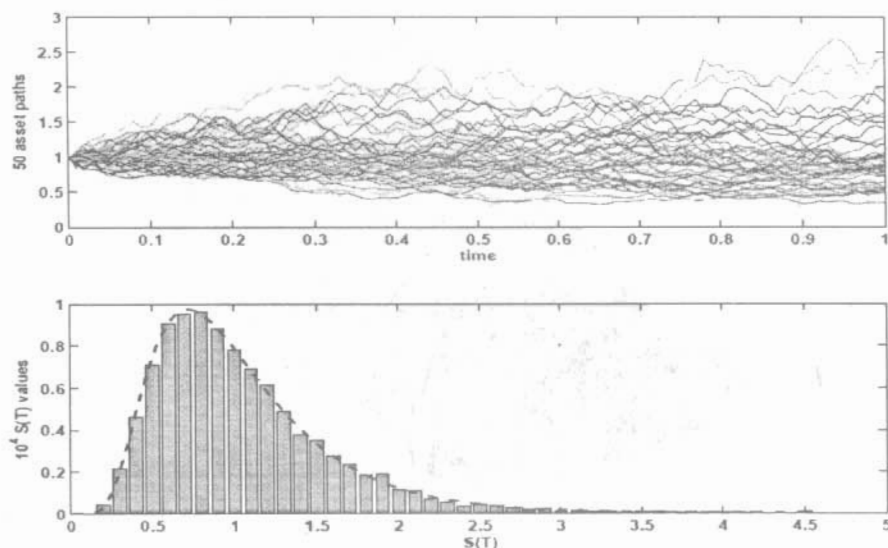
Hình 5.4 trên chỉ ra 50 quỹ đạo như vậy; trong mỗi trường hợp các điểm rời rạc $(t_i, S(t_i))$ được nối với nhau bởi các đoạn thẳng. Tại ngày đáo hạn, $t = T$, giá tài sản là một biến ngẫu nhiên với hàm mật độ cho bởi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi T}}\exp\left(\frac{-(\log(x/S_0) - (\mu - \sigma^2/2)T)^2}{2\sigma^2 T}\right), & \text{với } x > 0, \\ 0 & \text{với } x \le 0. \end{cases}$$

Để xác thực điều này, hình trên cho một biểu đồ trong đó giá cuối cùng $S(T)$ với 10000 quỹ đạo được mô tả. Đường cong mật độ được mô tả như một đường đậm.

Công thức Black-Scholes

Để mở rộng mô hình giá tài sản đơn giản ở trên, Black và Scholes đưa ra một số giả thiết về thị trường. Khi đó có thể sử dụng nguyên lý không cơ lợi



Hình 5.4: Quỹ đạo giá tài sản và biểu đồ tại thời điểm đáo hạn

("no free lunch") để thu được công thức định giá quyền chọn kiểu Âu tại thời điểm t và với giá tài sản S :

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2),$$

trong đó

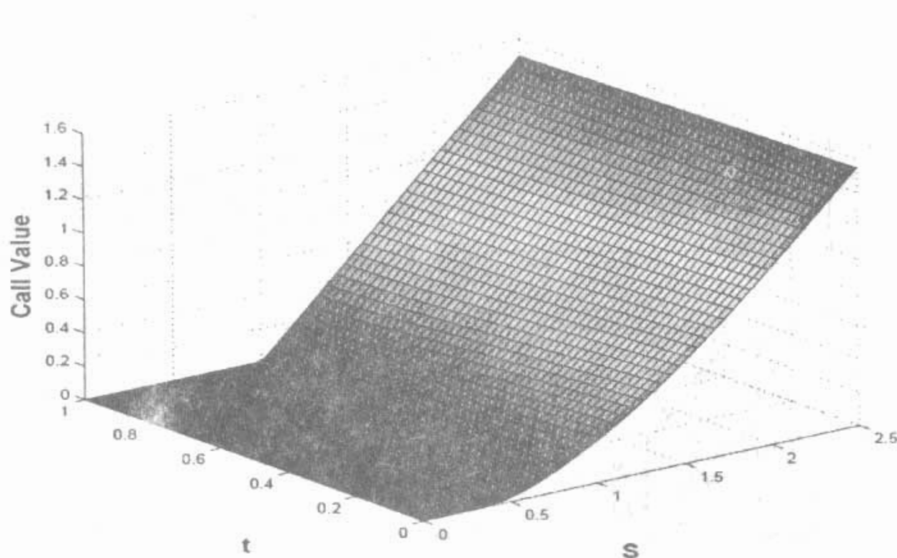
$$d_1 = \frac{\log(S/E) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}; \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

và $N(.)$ là hàm phân phối chuẩn $N(0,1)$:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{s^2}{2}} ds.$$

Tham số r trong công thức là tỷ lệ lãi suất. Nếu giá hôm nay (time zero) là S_0 thì công thức Black-Scholes cho phí quyền chọn là $C(S_0, 0)$. Hàm MATLAB $bsf.m$ sau đây cho một phương pháp thực hiện công thức, qua việc xây dựng hàm sai số erf.

Ví dụ 5.4.7. Công thức Black-Scholes cho quyền chọn mua kiểu Âu



Hình 5.5: Biểu diễn Black-Scholes cho một quyền chọn mua kiểu Âu

```
function C = bsf(S,t,E,r,sigma,T)
tau = T-t;
if tau > 0
d1 = (log(S/E) + (r + 0.5*sigma^2)*tau)/(sigma*sqrt(tau));
d2 = d1 - sigma*sqrt(tau);
N1 = 0.5*(1+erf(d1/sqrt(2)));
N2 = 0.5*(1+erf(d2/sqrt(2)));
C = S*N1-E*exp(-r*tau)*N2;
else
C = max(S-E,0);
end
```

Sử dụng hàm trên với một số giá trị cho trước của các tham số, ta có:

```
» S = 2; t = 0; E = 1; r = 0.05; sigma = 0.25; T = 3;
» C = bsf(S, t, E, r, sigma, T)
C =1.1447
```

Trong hình 5.5 ta thấy phí Black-Scholes $C(S,t)$ được biểu diễn như một hàm của S và t. Ở đây, $T = 1$ và $E = 1$, dễ nhận ra rằng tại thời điểm đáo hạn, giá trị quyền chọn giảm tới thu hoạch $\max(S - E, 0)$. Giá trị ban đầu $C(S,0)$ được tính tại giá ban đầu $S = S_0$.

Mặc dù bài toán định giá quyền chọn kiểu Âu cơ bản có lời giải đơn giản (với các giả thiết Black-Scholes), nhưng nó rất có ý nghĩa trong việc sử dụng các phương pháp số. Mở rộng bài toán này, ta có thể xây dựng phương pháp số cho các quyền chọn ngoại lai mà thu hoạch không chỉ phụ thuộc giá tài sản tại thời điểm đáo hạn mà còn phụ thuộc vào xu hướng của nó trong khoảng thời gian $[0, T)$. Chẳng hạn, thu hoạch có thể phụ thuộc vào giá tài sản lớn nhất, nhỏ nhất hoặc giá trung bình, giá mở cửa, giá đóng cửa hoặc có thể phụ thuộc trên giá tài sản cơ bản trước một barrier được xác định, ...

Chú ý 5.4.1. *Bằng quan sát, ta có thể ước lượng được các tham số μ và σ trong mô hình Black - Sholes, điều đó có nghĩa là ta ước lượng được giá S_t của chứng khoán. Giả sử, ta ghi nhận được một số số liệu về giá chứng khoán trong một khoảng thời gian $[0, T]$, cụ thể như sau: Chia đều đoạn $[0, T]$ thành n đoạn nhỏ đều như nhau có độ dài là Δ_t với $\Delta_t = t_i - t_{i-1}, \forall i = 1, 2, ..., n$, và giả sử đã biết chứng khoán tại thời điểm cuối t_{n+1} của mỗi khoảng nhỏ $[t_i, t_{i+1}]$. Vậy ta có $n + 1$ quan sát $S_1, ..., S_{n+1}$.*

Bước 1. Tạo ra một dãy số liệu:

$$U_i = \ln(S_{i+1}) - \ln(S_i), \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{5.71}$$

trong đó $U_1, U_2, ..., U_n$ là một dãy số. Nhưng trước khi thu thập số liệu quan sát thì ta cũng có thể biểu thị các giá trị của U_i bởi:

$$U_i = \sigma B_{t_{i+1}} - \sigma B_{t_i} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t. \tag{5.72}$$

trong đó đại lượng $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ có các tính chất sau:

- *$B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ là biến ngẫu nhiên chuẩn có kỳ vọng là 0 và phương sai là Δt.*
- *$B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ là các biến ngẫu nhiên độc lập.*

Bước 2: Tìm trung bình và phương sai của dãy số liệu: $U_1, U_2, ..., U_n$, theo công thức thống kê

Trung bình mẫu:

$$\overline{U} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i,$$

Phương sai mẫu:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(U_i - \overline{U}\right)^2.$$

Đó là những ước lượng cho trung bình và phương sai lý thuyết của biến ngẫu nhiên U dựa trên mẫu: $(U_1, U_2, ..., U_n)$.

Từ biểu thức (5.72) ta tính được trung bình và phương sai của U là:

Trung bình: $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t$,

Phương sai: $\sigma^2\Delta t$.

Bước 3. Giải các phương trình sau đây đối với μ *và* σ:

$$\begin{aligned}\overline{U} &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t,\\ S^2 &= \sigma^2\Delta t.\end{aligned}$$

Ta tìm được $\mu = \dfrac{1}{\Delta t}\left(\overline{U} + \dfrac{S^2}{2}\right)$ *và* $\sigma = \dfrac{S}{\sqrt{\Delta t}}$.

Ví dụ 5.4.8. Giá đóng cửa của cổ phiếu VCG (Tổng công ty cổ phần xuất nhập khẩu và xây dựng Việt Nam) trong khoảng thời gian từ ngày 17/08/2010 đến ngày 05/10/2010 được thống kê gồm 34 số liệu như sau (đơn vị: nghìn đồng):

Ngày	Giá đóng cửa	Ngày	Giá đóng cửa
17/08	24,7	13/09	26,0
18/08	24,1	14/09	26,4
19/08	23,4	15/09	25,8
20/08	22,9	16/09	25,5
23/08	22,4	17/09	27,1
24/08	21,0	20/09	28,8
25/08	19,7	21/09	28,2
26/08	20,1	22/09	27,9
27/08	19,8	23/09	26,8
30/08	21,1	24/09	27,0
31/08	22,2	27/09	27,0
01/09	23,7	28/09	27,3
06/09	25,3	29/09	26,2
07/09	26,8	30/09	25,7
08/09	26,1	01/10	25,5
09/09	27,6	04/10	24,0
10/09	27,6	05/10	23,7

(Nguồn: cophieu68.com)

Bằng các công thức trên, ta tính được :

$$\begin{aligned}\overline{U} &= -0,000543897;\\ S &= 0,017957614.\end{aligned}$$

Từ đó, ước lượng μ và σ theo tỷ lệ xích hằng năm: $\Delta t = \dfrac{1}{250}$ (một năm thường có khoảng 250 phiên giao dịch), ta có:

$$\widehat{\mu} = \frac{\widetilde{U} + \frac{S^2}{2}}{\Delta t} = -0,095664808;$$
$$\widehat{\sigma} = \frac{S}{\sqrt{\Delta t}} = 0,283934816.$$

Và do đó giá cổ phiếu chứng khoán vào bất kỳ một ngày t nào đó, có thể ước lượng bởi công thức:

$$\widehat{S_t} = S_0 \exp\left\{0,283934816 \times B_t + \left[-0,095664808 - \frac{(0,283934816)^2}{2}\right] t\right\}$$
$$= S_0 \exp\{0,283934816 \times B_t + (-0,135974297)\, t\}.$$

Bây giờ, mô phỏng chuyển động Brown B_t theo cách đã chỉ ra ở trên ta có thể dự đoán được giá của cổ phiếu VCG tại một thời điểm nào đó trong tương lai. Độc giả có thể thực hiện việc này như một bài tập bằng cách sử dụng công cụ sinh số ngẫu nhiên (Random Number Generation) trong Excel.

5.4.6 Phương pháp Monte Carlo

Giá trị quyền chọn Black-Scholes cũng có thể coi như một thu hoạch trung bình, có thể chiết khấu với một lãi suất, với điều kiện trung hòa rủi ro $\mu = r$. Nói cách khác, chúng ta có thể mô tả giá trị quyền chọn bằng cách đặt $\mu = r$ trong mô hình tài sản và tính thu hoạch trung bình trên tất các các quỹ đạo tài sản. Trong thực tế, ta có thể làm điều này bằng phương pháp mô phỏng Monte Carlo thu hoạch trung bình trên một số lớn các quỹ đạo tài sản. Với một quyền chọn kiểu Âu chúng ta chỉ cần biết về giá tài sản tại thời điểm đáo hạn, vì vậy ta lấy $\Delta t = T$ trong mỗi quỹ đạo. Thuật toán mô phỏng như sau:

for i = 1 to M
set $S_i = S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}\xi_i}$
set $P_i = e^{-rT}\max(S_i - E, 0)$
end
set $P_{mean} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} P_i$
set $P_{var} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}(P_i - P_{mean})^2$

Ở đây, P_i là thu hoạch từ quỹ đạo tài sản thứ i, được chiết khấu theo tỷ lệ e^{-rT} tại thời điểm tương lai $t = T$. Giá trị quyền chọn trung bình ước lượng theo Monte Carlo là P_{mean}, phương sai được tính là P_{var}. Từ đó ta có khoảng tin cậy với độ tin cậy 95% cho giá trị quyền chọn là:

$$\left(P_{mean} - 1,96\sqrt{P_{var}/M}; P_{mean} + 1,96\sqrt{P_{var}/M}\right).$$

Với M đủ lớn khoảng này sẽ chứa giá trị quyền chọn đúng với 95 trên 100 mô phỏng.

Trong thủ tục *mc.m* sau, ta xây dựng một chương trình MATLAB sử dụng phương pháp Monte Carlo. Ở đây chúng ta sử dụng bộ sinh số ngẫu nhiên và các câu lệnh *mean* và *std*.

Ví dụ 5.4.9. Định giá Monte Carlo cho quyền chọn mua kiểu Âu

```
S = 2; E = 1; r = 0.05; sigma = 0.25; T = 3; M = 1e6;
randn('state',100)
Svals = S*exp((r-0.5*sigma^2)*T + sigma*sqrt(T)*randn(M,1));
Pvals = exp(-r*T)*max(Svals-E,0);
Pmean = mean(Pvals)
width = 1.96*std(Pvals)/sqrt(M);
conf = [Pmean - width, Pmean + width]
```

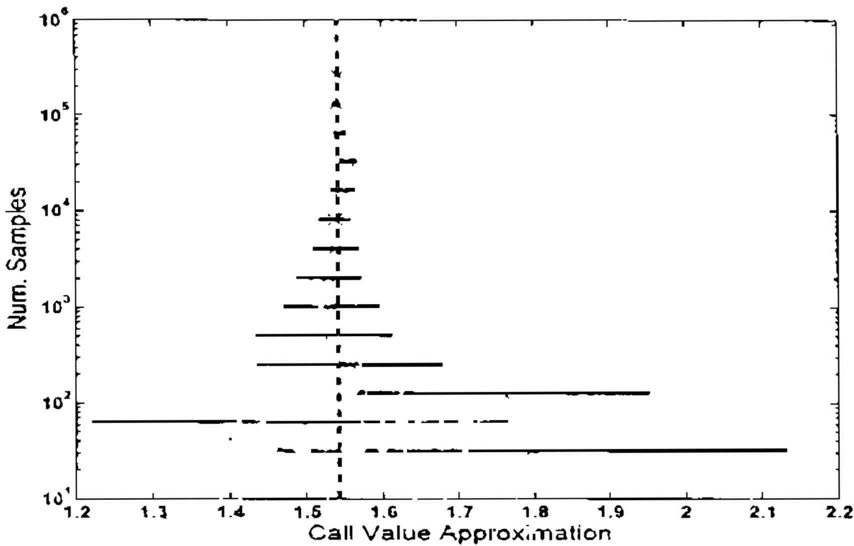
Chạy chương trình này, ta thu được kết quả như sau:

```
» mc
Pmean =
1.1453
conf =
1.1435 1.1471
```

Nhớ lại rằng công thức Black-Scholes với các tham số này cho $C = 1,1447$. Trong hình 5.6, ta chỉ ra cách xấp xỉ Monte Carlo với kích thước mẫu M, lấy $S = 10, E = 9, r = 0,06, \sigma = 0,1$ và $T = 1$. Đường cong cho hình ảnh về xấp xỉ Monte Carlo và đường thẳng chỉ khoảng tin cậy. Giá trị Black-Scholes được biểu diễn bằng đường đậm.

5.4.7 Phương pháp nhị phân

Mô hình giá tài sản đơn giản nhất là mô hình nhị phân, trong đó khoảng thời gian $[0, T]$ được rời rạc hóa thành các điểm $0 = t_0 < t_1 < ... < t_M = T$ với $t_i = i\Delta t$. Cho giá tài sản S_0 tại thời điểm không, giả sử rằng giá tại thời điểm



Hình 5.6: Xấp xỉ Monte Carlo và khoảng tin cậy cho một quyền chọn mua kiểu Âu

t_1 giảm xuống tới dS_0 hoặc tăng tới uS_0, ở đó $d < 1$ và $u > 1$. Khi đó tại thời điểm t_2 giá tài sản có thể giảm hoặc tăng và nhận các giá trị d^2S_0, duS_0 và u^2S_0. Tiếp tục như vậy, sẽ có $i + 1$ giá trị có thể tại các thời điểm $t_i = i\Delta t$, được cho bởi:

$$S_n^i = d^{i-n}u^n S_0, \quad 0 \le n \le i.$$

Tại thời điểm đáo hạn, $t_i = t_M = T$, có $M + 1$ giá tài sản có thể $\{S_n^M\}_{n=0}^M$. Đặt $\{C_n^M\}_{n=0}^M$ biểu diễn lượng thu hoạch từ một quyền chọn mua kiểu Âu tại thời điểm đáo hạn, ta biết rằng:

$$C_n^M = \max(S_n^M - E, 0), \quad 0 \le n \le M.$$

Phương pháp nhị phân xác định thu hoạch bằng cách tính ngược theo thời gian. Giá trị quyền chọn C_n^i biểu diễn giá tài sản S_n^i tại thời điểm t_i được tính như trung bình có trọng số của hai giá tài sản C_n^{i+1} và C_{n+1}^{i+1} từ thời điểm t_{i+1}. Công thức như sau:

$$C_n^i = e^{-r\Delta t}\left(pC_{n+1}^{i+1} + (1-p)C_n^{i+1}\right), \quad 0 \le n \le i, \le 0 \le i \le M-1.$$

Ở đây, tham số p là xác suất giá tài sản tăng. Công thức cho phép tính ngược về giá trị quyền chọn C_0^0 tại thời điểm ban đầu. Các tham số $\Delta t, u, d$ và p

cần được chọn sao cho mô hình nhị phân dần tới mô hình Black-Scholes khi $\Delta t \to 0$. Với Δt cố định, ta có hai phương trình với các tham số, và nhiều nghiệm có thể. Một lựa chọn là:

$$d = A - \sqrt{A^2 - 1}, \quad u = A + \sqrt{A^2 - 1}, \quad p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d},$$

ở đó $A = \frac{1}{2}\left(e^{-r\Delta t} + e^{(r+\sigma^2)}\Delta t\right)$.

Để minh họa, chúng ta xây dựng chương trình MATLAB cho mô hình nhị phân, sử dụng phép nhân ma trận. Giá trị quyền chọn xấp xỉ $W = 1,1448$ gần với giá trị cho bởi công thức Black-Scholes ở trên $C = 1,1447$.

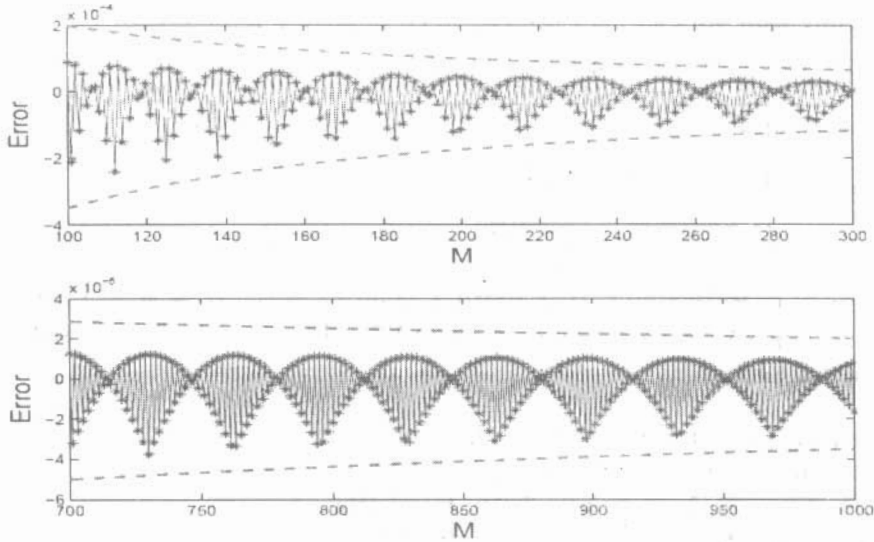
Ví dụ 5.4.10. Phương pháp nhị phân cho quyền chọn kiểu Âu

```
S = 2; E = 1; r = 0.05; sigma = 0.25; T = 3; M = 256;
dt = T/M; A = 0.5*(exp(-r* dt)+exp((r+sigma^2)*dt));
d = A - sqrt(A^2-1); u = A + sqrt(A^2-1);
p = (exp(r*dt)-d)/(u-d);
% Giá trị quyền chọn tại T
W = max(S*d.^([M:-1:0]').*u.^([0:M]')-E,0);
B = (1-p)*eye(M+1,M+1) + p*diag(ones(M,1),1);
B = sparse(B);
% Tính ngược để nhận được giá trị quyền chọn tại thời điểm ban đầu
for i = M:-1:1
W = B(1:i,1:i+1)*W;
end
W = exp(-r*T)*W;
```

Hình 5.7 chỉ ra sai số trong xấp xỉ nhị phân như một hàm của M trong trường hợp $S = 5$, $E = 3$, $T = 1$, $r = 0,06$ và $\sigma = 0,3$. Hình trên với $100 \leq M \leq 300$ và hình dưới với $700 \leq M \leq 1000$. Rõ ràng sai số giảm khi M lớn. Đường đậm trong hình có dạng "constant/M" - nó chỉ ra sai số với tốc độ hội tụ này.

5.4.8 Mặt sai phân hữu hạn Black-Scholes

Công thức Black-Scholes cho giá trị quyền chọn mua kiểu Âu ở trên là nghiệm của một phương trình đạo hàm riêng (PDE). PDE này là phương trình dạng parabolic với điều kiện đầu bị chặn Dirichlet. Đặt $\tau = T - t$ ký hiệu thời điểm



Hình 5.7: Sai số trong mô hình nhị phân như một hàm của M

đáo hạn, ta có thể trở lại với một thời điểm ban đầu tự nhiên xác định. PDE khi đó có dạng:

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rS\frac{\partial C}{\partial S} + rC = 0,$$

với điều kiện đầu

$$C(S,0) = \max(S(0) - E, 0)$$

và điều kiện bị chặn $C(0,\tau) = 0$, $C(S,\tau) \simeq S - Ee^{-r\tau}$ với S lớn, trên miền $S \geq 0$ và $0 \leq \tau \leq T$. Cắt miền S thành $0 \leq S \leq L$ và sử dụng một lưới sai phân hữu hạn $\{jh, ik\}$ với khoảng cách $h = L/N_x$ và $k = T/N_t$, ta có thể tính nghiệm rời rạc $V_j^i \simeq C(jh, ik)$. Đặt

$$V^i := \begin{pmatrix} V_1^i \\ V_2^i \\ \dots \\ V_{N_x-1}^i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_x-1}$$

là nghiệm số tại thời điểm i, ta có V^0 và các giá trị V_0^i và $V_{N_x}^i$ với mọi $1 \leq i \leq N_t$ thỏa mãn điều kiện biên. Sử dụng sai phân ngược với đạo hàm theo t và sai

phân trung tâm với đạo hàm theo S, ta có phương pháp chi tiết:

$$\frac{V_j^{i+1} - V_j^i}{k} - \frac{1}{2}\sigma^2(jh)^2\frac{(V_{j+1}^i - 2V_j^i + V_{j-1}^i)}{h^2} - rjh\frac{(V_{j+1}^i - V_{j-1}^i)}{2h} + rV_j^i = 0.$$

Phương pháp này có thể biểu diễn dưới dạng ma trận như sau:

$$V^{i+1} = FV^i + p^i, \quad \text{với} \quad 0 \leq i \leq N_t - 1,$$

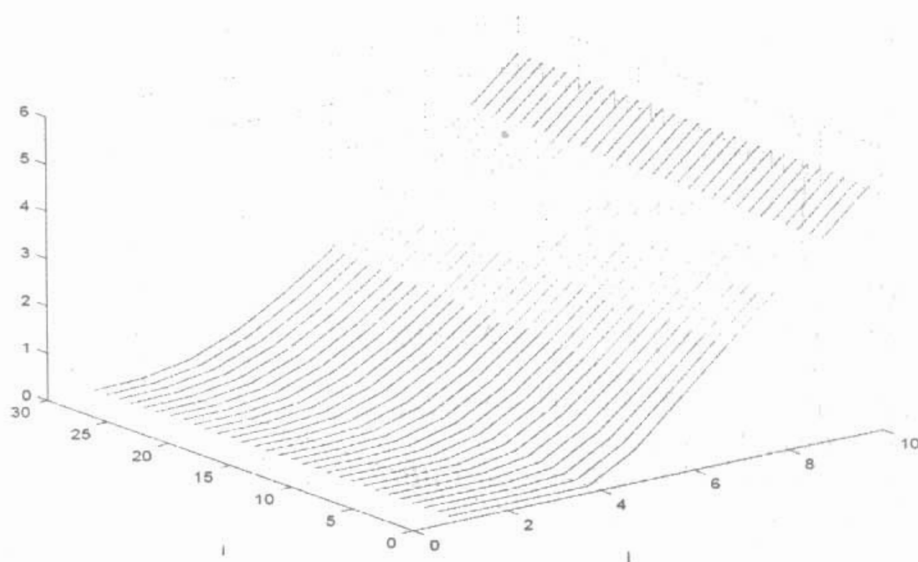
trong đó $F \in \mathbb{R}^{(N_x-1)\times(N_x-1)}$ là vectơ 3-chiều và vectơ $p^i \in \mathbb{R}^{N_x-1}$ được xác định bởi điều kiện biên. Chương trình MATLAB trong thuật toán sau minh họa phương pháp này.

Ví dụ 5.4.11. Mặt Black-Scholes cho quyền chọn kiểu Âu

```
E = 4; sigma = 0.5; r = 0.03; T = 1;
Nx = 11; Nt = 29; L = 10; k = T/Nt; h = L/Nx;
T1 = diag(ones(Nx-2,1),1) - diag(ones(Nx-2,1),-1);
T2 = -2*eye(Nx-1,Nx-1) + diag(ones(Nx-2,1),1) + diag(ones(Nx-2,1),-1);
mvec = [1:Nx-1]; D1 = diag(mvec); D2 = diag(mvec.^2);
Aftcs = (1-r*k)*eye(Nx-1,Nx-1) + 0.5*k*sigma^2*D2*T2 + 0.5*k*r*D1*T1;
U = zeros(Nx-1,Nt+1); Uzero = max([h:h:L-h]'-E,0);
U(:,1) = Uzero; p = zeros(Nx-1,1);
for i = 1:Nt
tau = (i-1)*k;
p(end) = 0.5*k*(Nx-1)*((sigma^2)*(Nx-1)+r)*(L-E*exp(-r*tau));
U(:,i+1) = Aftcs*U(:,i) + p;
end
waterfall(U'), xlabel('j'), ylabel('i')
```

Hình 5.8 chỉ ra một mặt Black-Scholes sinh ra từ phương pháp này. Bằng cách tương tự, ta cũng có thể sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn cho quyền chọn kiểu Mỹ.

Hiện nay, với sự phát triển của công nghệ thông tin, việc sử dụng phương pháp mô phỏng ngẫu nhiên để giải số các phương trình vi phân ngẫu nhiên trở nên dễ dàng hơn. Ta cũng có thể sử dụng phương pháp này để giải số các phương trình vi phân ngẫu nhiên nhiều chiều. Bằng phương pháp mô phỏng ngẫu nhiên, chúng ta còn có thể mô phỏng các quá trình ngẫu nhiên trong tài chính từ đó vẽ được các quỹ đạo cũng như dự báo được xu hướng của các dòng tài chính trong tương lai.



Hình 5.8: Mặt sai phân hữu hạn Black-Scholes

BÀI TẬP

Bài tập 5.1. Giải các phương trình vi phân ngẫu nhiên sau:

1) $dX_t = \frac{1}{2}X_t dt + X_t dB_t.$

ĐS: $X_t = \exp(B_t)$.

2) $dX_t = -\frac{1}{1+t}X_t dt + \frac{1}{1+t}dB_t, \qquad X_0 = 0.$

ĐS: $X_t = \frac{1}{1+t}B_t.$

3) $dX_t = -\frac{1}{2}X_t dt + \sqrt{1-X_t^2}dB_t,$ với $t < \inf\left\{s > 0; B_s \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$, $B_0 = a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

ĐS: $X_t = \sin B_t.$

Bài tập 5.2. Giải các phương trình vi phân ngẫu nhiên sau:

1) $dX_t = \frac{1}{2}a^2 X_t dt + aX_t dB_t.$

ĐS: $X_t = X_0 \exp(aB_t)$.

2) $dX_t = \frac{1}{2}(\ln a)^2 X_t dt + (\ln a) X_t dB_t.$

ĐS: $X_t = X_0 a^{B_t} = X_0 \exp(B_t \ln a)$.
3) $dX_t = (2\ln b)^{-1} b^{-2X_t} dt + (\ln b)^{-1} b^{X_t} dB_t$.
ĐS: $X_t = \log_b \left(B_t + b^{X_0}\right)$.
4) $dX_t = -\frac{1}{2}a^2 X_t dt + a\sqrt{1 - X_t^2} dB_t$.
ĐS: $X_t = \sin(aB_t + \arcsin X_0)$.
5) $dX_t = -\frac{1}{2}a^2 X_t dt - a\sqrt{1 - X_t^2} dB_t$.
ĐS: $X_t = \cos(aB_t + \arccos X_0)$.
6) $dX_t = a^2 X_t \left(1 + X_t^2\right) dt + a\left(1 + X_t^2\right) dB_t$.
ĐS: $X_t = \tan(aB_t + \arctan X_0)$.
7) $dX_t = a^2 X_t \left(1 + X_t^2\right) dt - a\left(1 + X_t^2\right) dB_t$.
ĐS: $X_t = \cot(aB_t + \text{arccot} X_0)$.
8) $dX_t = -a^2 \sin X_t \cos^3 X_t dt + a\cos^2 X_t dB_t$.
ĐS: $X_t = \arctan(aB_t + \tan X_0)$.
9) $dX_t = a^2 \cos X_t \sin^3 X_t dt - a\sin^2 X_t dB_t$.
ĐS: $X_t = \text{arccot}(aB_t + \cot X_0)$.
10) $dX_t = 1dt + 2\sqrt{X_t} dB_t$.
ĐS: $X_t = \left(B_t + \sqrt{X_0}\right)^2$.

Bài tập 5.3. Giải các phương trình vi phân ngẫu nhiên sau:
1) $dX_t = (1 + X_t)\left(1 + X_t^2\right) dt + \left(1 + X_t^2\right) dB_t$.
ĐS: $X_t = \tan(t + B_t + \arctan X_0)$.
2) $dX_t = \left(\frac{1}{2}X_t + \sqrt{1 + X_t^2}\right) dt + \sqrt{1 + X_t^2} dB_t$.
ĐS: $X_t = \text{sh}(t + B_t + \text{arcsh} X_0)$.
3) $dX_t = -\left(\alpha + \beta^2 X_t\right)\left(1 - X_t^2\right) dt + \beta\left(1 - X_t^2\right) dB_t$,
trong đó α, β là hằng số.
ĐS:

$$X_t = \frac{(1 + X_0)\exp(-2\alpha t + 2\beta B_t) + X_0 - 1}{(1 + X_0)\exp(-2\alpha t + 2\beta B_t) + 1 - X_0}.$$

Bài tập 5.4. Giải các phương trình vi phân ngẫu nhiên sau:
a) Phương trình Verhulst

$$dX_t = \left(\lambda X_t - X_t^2\right) dt + \sigma X_t dB_t.$$

ĐS:

$$X_t = \frac{X_0 \exp\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma B_t\right)}{1 + X_0 \int_0^t \exp\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\right) s + \sigma B_s\right) ds}.$$

b) Phương trình Ginzburg-Landau

$$dX_t = \left(-X_t^3 + \left(\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\right) X_t\right) dt + \sigma X_t dB_t.$$

ĐS:

$$X_t = \frac{X_0 \exp\left(\alpha t + \sigma B_t\right)}{\sqrt{1 + 2X_0^2 \int_0^t \exp\left(2\alpha s + 2\sigma B_s\right) ds}}.$$

Từ đó hãy giải phương trình tổng quát:

$$dX_t = \left(aX_t^n + bX_t\right) dt + cX_t dB_t.$$

Bài tập 5.5. Với i là đơn vị ảo, Z_t là một quá trình Itô phức, hãy giải các phương trình vi phân ngẫu nhiên phức sau:

a) $dZ_t = -\frac{1}{2} Z_t dt + i Z_t dB_t$.

ĐS: $Z_t = Z_0 \exp(iB_t)$.

b) $dZ_t = iZ_t dB_t$.

ĐS: $Z_t = Z_0 \exp\left(iB_t + \frac{1}{2}t\right)$.

Bài tập 5.6. Cho $(B_t^1; B_t^2)$ là một chuyển động Brown 2-chiều, hãy giải phương trình vi phân ngẫu nhiên:

$$dX_t = aX_t dt + bX_t dB_t^1 + cX_t dB_t^2.$$

ĐS: $X_t = X_0 \exp\left(\left(a - \frac{1}{2}\left(b^2 + c^2\right)\right) t + bB_t^1 + cB_t^2\right)$.

Bài tập 5.7. Giải các phương trình vi phân ngẫu nhiên nhiều chiều sau:

a)

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} X_2 \\ X_1 \end{bmatrix} dB_t,$$

trong đó $(X_1; X_2) = (X_1(t); X_2(t))$, $t \geq 0$, $(X_1(0); X_2(0)) = (0; 0)$.

ĐS: $(X_1(t), X_2(t)) = (\cosh B_t, \sinh B_t)$.

b)

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ X_2 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{X_1} \end{bmatrix} dB_t, \qquad \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

ĐS: $(X_1(t), X_2(t)) = (t, e^t B_t)$.

c)

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{b} \\ \frac{b}{a} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} dB_t,$$

trong đó $a > 0, b > 0$.
DS: $(X_1(t), X_2(t)) = (a\cos B_t, b\sin B_t)$.

Bài tập 5.8. Giải các phương trình vi phân ngẫu nhiên nhiều chiều sau:
a)

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dB_1 \\ dB_2 \end{bmatrix},$$

trong đó $(X_1(0); X_2(0)) = (0; 0)$; $(X_1; X_2) = (X_1(t); X_2(t))$, và chuyển động Brown 2-chiều $(B_1; B_2) = (B_1(t); B_2(t))$, $t \geq 0$.
b)

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ -X_1 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \alpha dB_1 \\ \beta dB_2 \end{bmatrix},$$

trong đó $(X_1(0); X_2(0)) = (0; 0)$; $(X_1; X_2) = (X_1(t); X_2(t))$; α, β là các hằng số và chuyển động Brown 2-chiều $(B_1; B_2) = (B_1(t); B_2(t))$, $t \geq 0$.

Tài liệu tham khảo

[1] Simon Benninga: Financial Modeling, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 2^{nd} edition, 2000.

[2] D. J. Higham and N. J. Higham: MATLAB Guide, SIAM, Philadelphia, 2000.

[3] J. C. Hull: Options, Futures, & Other Derivatives, Prentice Hall, New Jersey, 4^{th} edition, 2000.

[4] P. E. Kloeden and E. Platen: Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Springer, 1995.

[5] Y. K. Kwok: Mathematical models of financial derivatives, Springer finance, 1998.

[6] B. Øksendal: Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications, Springer Berlin, Heidelberg, 5^{th} edition, 1998.

[7] A. N. Shiryaev: Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory, Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability, Vol. 3, World Scientific, 1999.

[8] Steven Shreve: Stochastic Calculus and Finance, Lectures, Carnegie Mellon University, 1997.

[9] Mai Siêu: Toán Tài chính, Nhà xuất bản Thanh niên, Hà Nội, 1996.

[10] Trần Hùng Thao: Tích phân ngẫu nhiên và phương trình vi phân ngẫu nhiên, Nhà xuất bản Khoa học kỹ thuật, Hà Nội, 1998.

[11] Trần Hùng Thao: Nhập môn Toán học tài chính, Nhà xuất bản Khoa học kỹ thuật, Hà Nội, 2009.

[12] E. Wong and B. Hajek: Stochastic Processes in Engineering Systems, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1985.

Chịu trách nhiệm xuất bản : **TS. Phạm Văn Diễn**
Biên tập : **TS. Vũ Thị Minh Luận**
Trình bày bìa : **Trịnh Thị Thuỳ Dương**

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
70 Trần Hưng Đạo – Hà Nội

In 500 cuốn khuôn khổ 16 x 24 cm, tại Xưởng in Nhà xuất bản Văn hóa Dân tộc.
Đăng ký kế hoạch xuất bản số: 215 - 2010/CXB/396 – 17/KHKT.
Quyết định xuất bản số: 327/QĐXB - NXBKHKT, ngày 31 - 12 - 2011.
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2011.

SÁCH ĐƯỢC PHÁT HÀNH TẠI NHỮNG ĐỊA CHỈ SAU:

MIỀN BẮC

Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật:
70 Trần Hưng Đạo - Quận Hoàn Kiếm - Hà Nội * ĐT: 04.3822 0686;
Website: http://www.nxbkhkt.com.vn; Email: phathanh_nxbkhkt@vnn.vn

Tổng công ty sách Việt Nam:
44 Tràng Tiền - Quận Hoàn Kiếm - Hà Nội * ĐT: 04.39365526

Công ty TNHH Nhà nước một thành viên Sách Hà Nội
34 Tràng Tiền - Quận Hoàn Kiếm - Hà Nội * ĐT: 04. 38241615

Trung tâm sách Bách Khoa
Số 1 Giải Phóng - Quận Hai Bà Trưng - Hà Nội * ĐT: 04. 38682419

Các cửa hàng sách đường Hoa Lư, đường Tạ Quang Bửu, trong trường Đại học Bách Khoa Hà Nội

MIỀN TRUNG

Nhà sách Chánh Trí
116A Nguyễn Chí Thanh - Quận Hải Châu - Đà Nẵng * ĐT: 0511. 3820129

Hệ thống nhà sách trực thuộc Công ty cổ phần Văn hóa - Du lịch Gia Lai tại các tỉnh:
- Quảng Nam: 24 Trần Cao Vân - Tam Kỳ - Quảng Nam
- Nghệ An: 343 Lê Duẩn - Vinh - Nghệ An
- Gia Lai: 6 Lê Lợi - PleiKu

MIỀN NAM

Chi nhánh Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật
28 Đồng Khởi - Quận 1 - TP Hồ Chí Minh * ĐT: 08. 38225062

Nhà sách Thăng Long
2 Bis - Nguyễn Thị Minh Khai - Quận 1 - TP Hồ Chí Minh * ĐT: 08. 39102062

Nhà xuất bản Chính trị Quốc gia - Chi nhánh Đồng bằng sông Cửu long tại Cần Thơ
Số 5 đường 30/4, Thành phố Cần Thơ * ĐT: 0710 3839839

211025 M00



Giá : 58000Đ